REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 65. Agosto 2022
Páginas 1-11

Transformando polígonos: Actividades con GeoGebra para el aula
Transformando polígonos: Atividades com GeoGebra para a sala de aula

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Fecha de recepción: 24/06/2022
Fecha de aceptación: 14/07/2022

Resumen	El objetivo del presente artículo es proponer una serie de actividades para realizar en el aula para trabajar contenidos como son el cálculo de áreas y perímetros de polígonos, para promover un cambio en cuanto a las tareas habituales, basadas en cálculos numéricos. La idea es mostrar algunas construcciones que requieran poco tiempo y pocos pasos, pero que ofrezcan distintas opciones para desarrollar conceptos matemáticos, para lo que GeoGebra será de gran ayuda ya que las opciones que ofrece para investigar, manipular, visualizar o experimentar permitirán afrontar la resolución de estas propuestas en las que se plantea trabajar con datos genéricos, evitando, por tanto, los valores numéricos que solo sirven para repetir tareas de forma mecánica. **Palabras clave**: polígono, perímetro, área.
Abstract	The objective of this article is to propose a series of activities to carry out in the classroom to work on contents such as the calculation of areas and perimeters of polygons, to promote a change in terms of habitual tasks, based on numerical calculations. The objective is to show some constructions that require little time and few steps, but that offer different options to develop mathematical concepts, for which GeoGebra will be of great help since the options it offers to investigate, manipulate, visualize or experiment will allow to face the resolution of these proposals in which it is proposed to work with generic data, thus avoiding numerical values that only serve to repeat tasks mechanically. **Keywords**: polygon, perimeter, área.
Resumo	O objetivo deste artigo é propor uma série de atividades a serem realizadas em sala de aula para trabalhar conteúdos como o cálculo de áreas e perímetros de polígonos, para promover uma mudança em termos de tarefas habituais, com base em cálculos numéricos. O objetivo é mostrar algumas construções que requerem pouco tempo e poucos passos, mas que oferecem diferentes opções para desenvolver conceitos matemáticos, para os quais o GeoGebra será de grande ajuda, pois as opções que oferece para investigar, manipular, visualizar ou experimentar permitirão enfrentar a resolução dessas propostas em que se propõe trabalhar com dados genéricos, evitando assim valores numéricos que servem apenas para repetir tarefas mecanicamente. **Palavras-chave:** polígono, perímetro, área.

1. Introducción

Lo habitual al desarrollar los contenidos sobre polígonos en el aula es dedicar atención a su forma, propiedades y construcción, así como al cálculo de áreas y perímetros, completando las propuestas con la formación de nuevas figuras formadas por diferentes polígonos en las que hay que determinar la medida del perímetro o la del área. Revisando las propuestas que aparecen en cualquier libro de texto de niveles educativos de Educación Secundaria (12 a 16 años), encontraremos actividades similares a las mostradas en la figura 1.

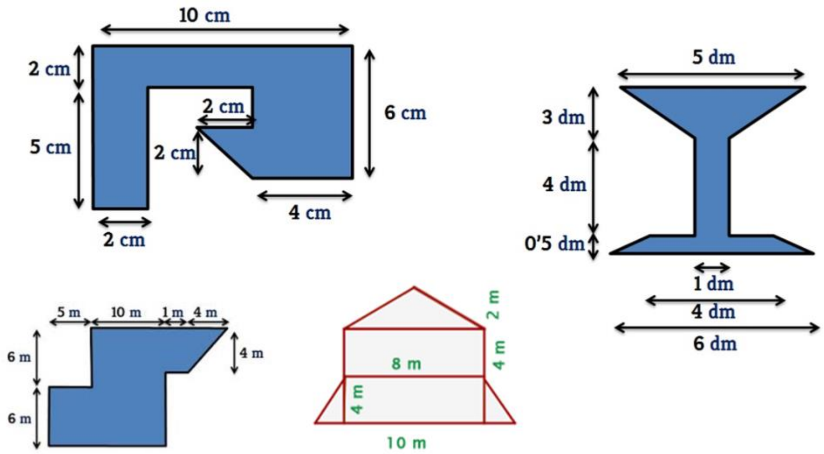

Figura 1. Cálculo de áreas y perímetros.

Actividades como las mostradas en la figura anterior solo requieren identificar los polígonos que intervienen, conocer la definición de perímetro y la expresión del área para obtener los valores pedidos, procesos que después de varios ejemplos, podemos considerar como mecánicos, para los que apenas nos bastará con una calculadora para realizar los cálculos.

Podemos plantearnos cambiar al menos los tipos de actividades, para buscar que el proceso requiera de nuevas tareas, que hagan al alumnado razonar sobre los posibles caminos que debe afrontar para dar respuesta a las cuestiones planteadas o para exponer la razón por la que se cumple una determinada relación.

Por ejemplo, si le planteamos la relación existente entre el área del triángulo ABC y la de cada uno de los triángulos ABD, siendo D un punto de la recta paralela al lado AB por el punto C, el alumno podrá investigar la medida de las áreas para llegar a la conclusión esperada. Como proponen Recio, T.; Van Vaerenbergh, S.; Vélez, M. P (Unión, nº 59. 2020), GeoGebra constituye un recurso idóneo para promover tareas que requieran investigación por parte del alumnado, será fundamental para manipular los distintos objetos que intervienen en una construcción de manera que pueda deducir lo que ocurre con el área de todos los triángulos, valores que como sabemos aparecerán en la vista algebraica y, por supuesto, también en la vista gráfica.

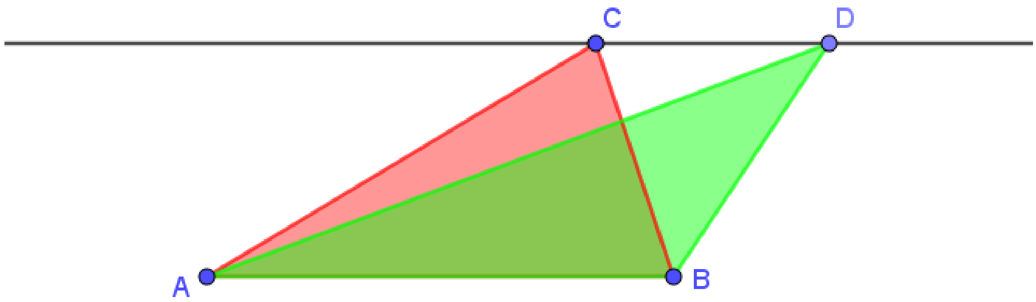

Figura 2. Triángulos de igual área

Con ayuda de GeoGebra se podrá mover el punto D que aparece en la figura 2 para comprobar, como era de esperar, que todos los posibles triángulos que cumplen la condición establecida tienen la misma área que el triángulo inicial ABC.

El objetivo será lograr que el alumno determine la razón por la que ocurre esta situación, que como bien sabemos, no es otra que dos triángulos con la misma base AB y la misma altura tendrá la misma área.

Como siempre he manifestado, al trabajar en el aula con GeoGebra hay que buscar construcciones sencillas, que no requieran muchos pasos y por tanto no necesiten mucha dedicación y tiempo a los preliminares, lo que no significa que no ofrezcan muchas posibilidades para trabajar contenidos matemáticos que es el objetivo principal en el proceso de enseñanza cuando se utiliza un recurso TIC.

Así, volviendo al ejemplo anterior, sobre la misma construcción se puede proponer una nueva actividad, como determinar el triángulo ABD de menor perímetro cuando D se mueve por la recta paralela a AB por C.

2. Relación entre polígonos para determinar la expresión del área

Será posible aprovechar las opciones que GeoGebra ofrece para crear animaciones, lo que facilitará la relación entre distintos polígonos para transformar uno en otro que tenga la misma área, lo que facilitará el aprendizaje de las fórmulas correspondientes ya que siempre será mejor una imagen, y en este caso, una animación, para que el alumno aprenda la expresión del área de un determinado polígono.

Existen numerosas construcciones en la web de recursos de GeoGebra con ejemplos de relaciones entre las áreas de distintos polígonos, por lo que animamos a buscar y sobre todo a llevarlas al aula para facilitar el aprendizaje.

Por ejemplo, planteemos la siguiente actividad: “Dado un rombo transformarlo en un rectángulo de manera que los dos polígonos tengan el mismo área”.

Realizando la transformación que aparece en la figura 3, el alumno conocedor de la expresión del área del rectángulo, podrá deducir cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo. $A = D.\frac{d}{2} = \frac{D.d}{2}$.

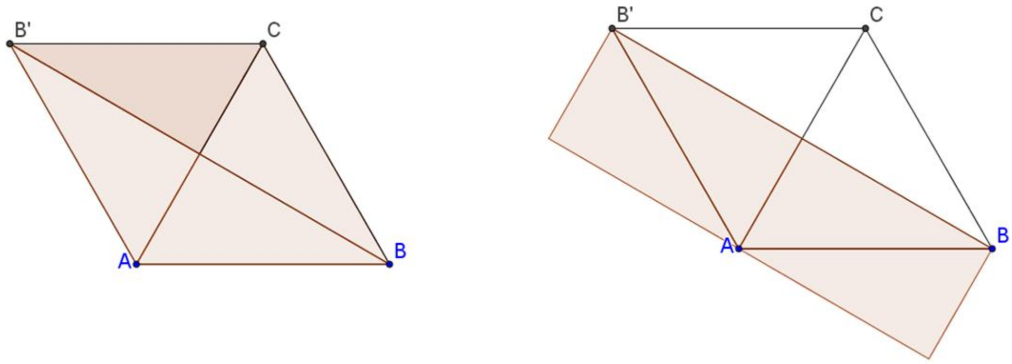

Figura 3. Relación entre el área de un rombo y un rectángulo

De manera similar se podrán encontrar otros ejemplos en la Web de recursos de GeoGebra.

3. Doble perímetro o doble área

Quizás las actividades que mayor dificultad plantean al alumnado son aquellas en las que no aparecen datos, todo lo contrario de las mostradas en la figura 1 en la que cada lado tiene una medida que bastará utilizar para hallar su perímetro o su área.

Pero cómo afrontará el alumno una actividad en la que se plantea que a partir de un triángulo cualquiera ABC, construya otro triángulo cuya área sea el doble del área del triángulo inicial, o un triángulo cuyo perímetro sea el doble del perímetro del triángulo ABC.

Más importante que el proceso utilizado en la construcción serán las relaciones o propiedades que utilice para encontrar la solución.

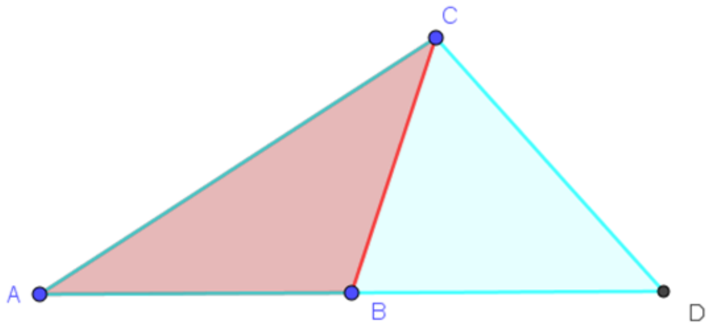

Figura 4. Triángulo de doble área

Para determinar el triángulo de doble área bastará con partir de una base que sea el doble de la base inicial AD = 2 AB, o de una altura doble de la altura inicial, manteniendo en cada caso, el otro valor, como aparece representado en la figura 4.

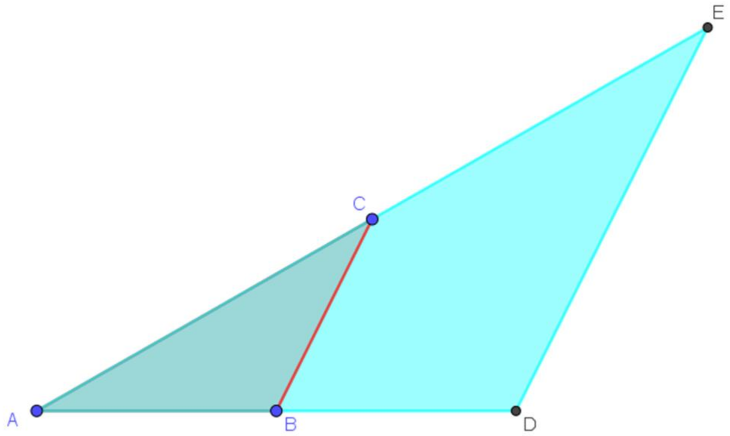

Figura 5. Triángulo de doble perímetro

De manera similar el alumno podrá determinar el triángulo de doble perímetro, como queda reflejado en la figura 5, prolongando los lados AB y AC, para determinar los puntos D y E, tales que AD = 2 AB y AE = 2 AC, quedando solo por demostrar que el tercer lado DE será también el doble del lado BC, para lo que solo hay que preguntar en qué famoso teorema se ha apoyado para afirmar esa relación.

Cualquier actividad de este tipo se puede ampliar a otros polígonos o a relaciones del doble o triple relación entre las áreas o los perímetros, así como plantear si es posible obtener un nuevo polígono en el que a la vez el perímetro y el área sea el doble, el triple, ..., del polígono inicial.

4. Rectángulos y cuadrados

A continuación planteamos nuevas actividades en las que buscaremos transformar un rectángulo en un cuadrado de manera que se mantenga el mismo perímetro o se mantenga la misma área.

Siempre con ayuda de GeoGebra creamos un rectángulo ABCD, aplicando las relaciones necesarias entre sus vértices para que, al moverlos, el polígono no pierda su condición de rectángulo.

El primer objetivo será transformar el rectángulo ABCD en un cuadrado de manera que tenga el mismo perímetro que el rectángulo.

El proceso que debe realizar el alumno comenzará por establecer que, si los lados del rectángulo miden a y b unidades, su perímetro será $P = 2a + 2b = 2(a + b)$. Suponiendo que el lado del cuadrado que debe construir es x, su perímetro sería $P = 4x$.

Como los dos valores deben ser iguales, tendremos que $2(a + b) = 4x$, de donde $x = \frac{a+b}{2}$.

Por tanto, ya queda determinado el lado del cuadrado que se debe construir para lograr que los dos polígonos tengan el mismo perímetro.

El segundo objetivo sería construir un cuadrado que tenga la misma área que el rectángulo inicial. Realizando un proceso similar, tendremos que el área del rectángulo es $A = a.b$, mientras que el área del cuadrado será $A = x^2$.

Para determinar el valor del lado del cuadrado que cumple esta condición, bastará con igualar las áreas.

$$a.b = x^2 \qquad x = \sqrt{a.b}$$

Una vez obtenidas las medidas de los lados de los dos cuadrados buscados, hay que mostrar al alumno que para que tengan el mismo perímetro, la medida del lado es la media aritmética de las medidas de los lados del rectángulo, mientras que para que el área sea igual, el lado del cuadrado debe ser la media geométrica de las medidas de los lados del rectángulo.

Ya solo queda representar las dos medidas anteriores con ayuda de GeoGebra. Realizando la construcción mostrada en la figura 6, se obtendrá la representación de la media geométrica y la media aritmética de los valores correspondientes a los lados del triángulo AB y BC.

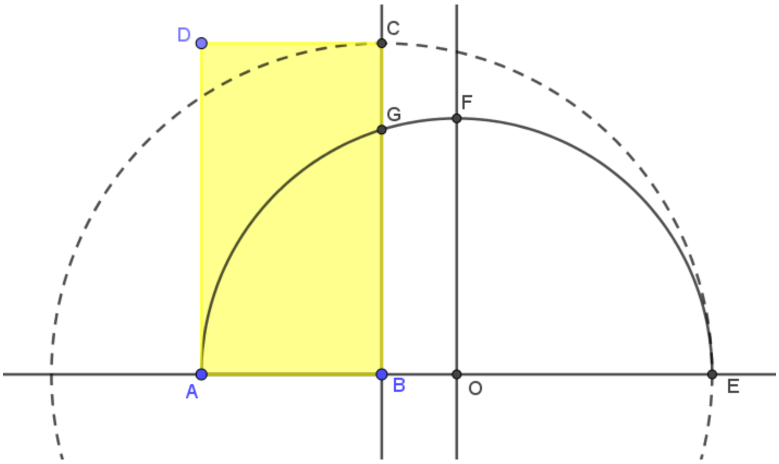

Figura 6. Representación de la media aritmética y la media geométrica

En la figura anterior el segmento OF corresponde a la media aritmética, mientras que la media geométrica queda representada por el segmento BG.

El proceso de construcción no es complicado ya que se trata de trasladar medidas con ayuda de la herramienta Circunfencia.

Quedaría por justificar que esos valores corresponden a los indicados, para lo que bastará recurrir al teorema de la altura, tal y como aparece en la figura 7.

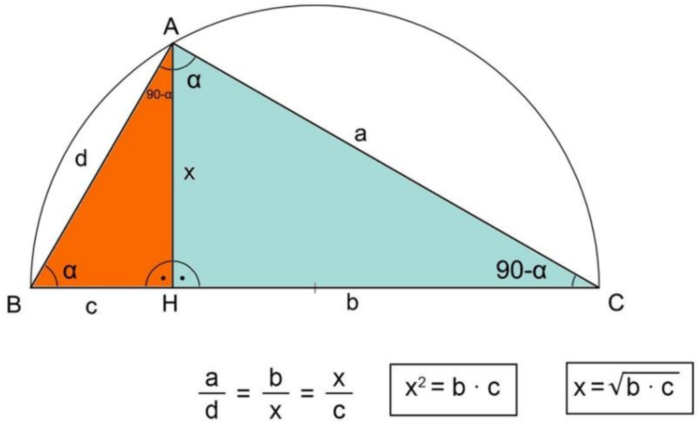

Figura 7. Teorema de la altura. Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=-2rjOFcrSLA

Utilizando una representación similar a la anterior, la media geométrica servirá para construir un cuadrado cuya área sea triple, cuádruple, etc.; actividades que se pueden proponer para su realización por parte del alumnado.

De esta forma describiremos y utilizaremos el valor de la media geométrica, relacionándola con otros teoremas como el de la altura para confirmar las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, a veces olvidados.

5. Otras actividades

Con un planteamiento similar será posible realizar distintas transformaciones entre otros polígonos con la condición de mantener el área.

Una construcción con carácter general que se puede realizar sería la que permite obtener a partir de un polígono cualquiera otro con un lado menos, pero con la misma área.

Para mantener el área en un nuevo polígono que tenga un lado menos bastará aplicar la propiedad con la que iniciamos este artículo, que no era otra que dos triángulos con igual base y altura tienen la misma área.

Por ejemplo, a partir de un hexágono cualquiera vamos a transformarlo en un pentágono de manera que los dos polígonos tengan la misma área.

La construcción realizada aparece en la figura 8, en la que el hexágono ABCDEF se ha transformado en el pentágono ABCGF manteniendo el área ya que los triángulos FDE y FDG tienen la misma base FD y le misma altura DG, por tanto, el área no ha cambiado.

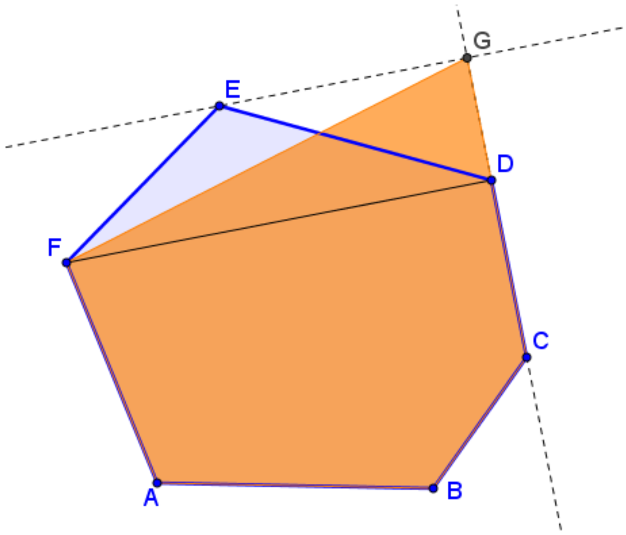

Figura 8 Polígonos de igual área y un lado menos

De la misma forma se puede plantear la actividad contraria, en la que a partir de un polígono cualquiera se construya un nuevo polígono con la misma área pero con un lado más que el polígono inicial.

Como es evidente, aplicando reiteradamente esta construcción, se podrá transformar cualquier polígono en otro manteniendo el área.

Apliquemos lo expuesto anteriormente para transformar un hexágono regular en un cuadrado, de manera que los dos polígonos mantengan su área.

Aprovechando que el polígono de partida es regular se pueden lograr otras transformaciones, en las que se aplica la misma propiedad anterior. Así, el hexágono regular ABCDEF se podrá convertir en un trapecio sin más que buscar dos triángulos de manera que el área no cambie, tal y como aparece en la figura 9.

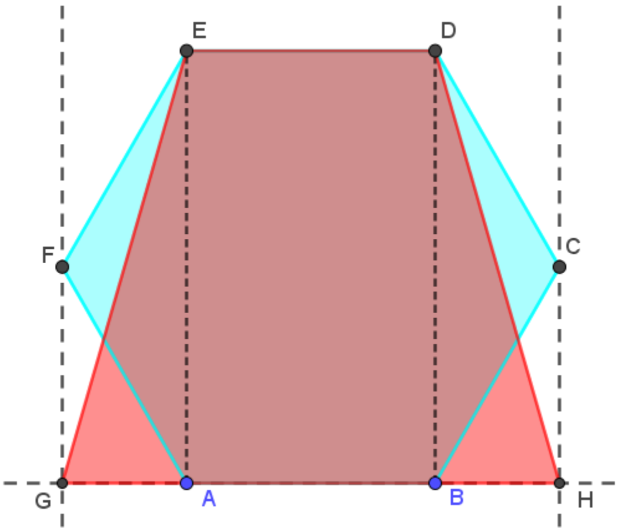

Figura 9. De hexágono regular a trapecio de igual área

Fácilmente se puede observar que los triángulos AEF, AEG, BCD y BHD tienen la misma área ya que todos tienen bases y alturas iguales. Por tanto, el hexágono regular ha quedado transformado en un trapecio GHDE.

A continuación, transformamos el trapecio en un triángulo tal y como aparece en la figura 10.

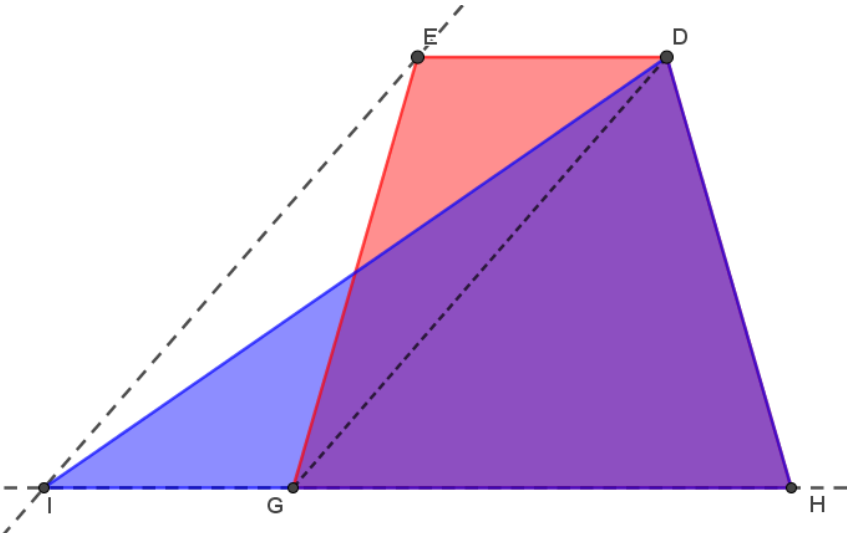

Figura 10. De trapecio a triángulo de igual área

Como podemos observar se ha aplicado la misma propiedad ya conocida para obtener el triángulo IGD cuya área sea igual a la del triángulo GDE ya que la recta que pasa por los vértices I y E, es paralela al lado GE.

Aún nos queda un par de transformaciones más para convertir el triángulo en un rectángulo y por último, a partir de la construcción expuesta anteriormente, utilizando la media geométrica, obtener el cuadrado buscado, de manera que su área sea igual a la del hexágono regular de partida.

La siguiente transformación aparece representada en la figura 11.

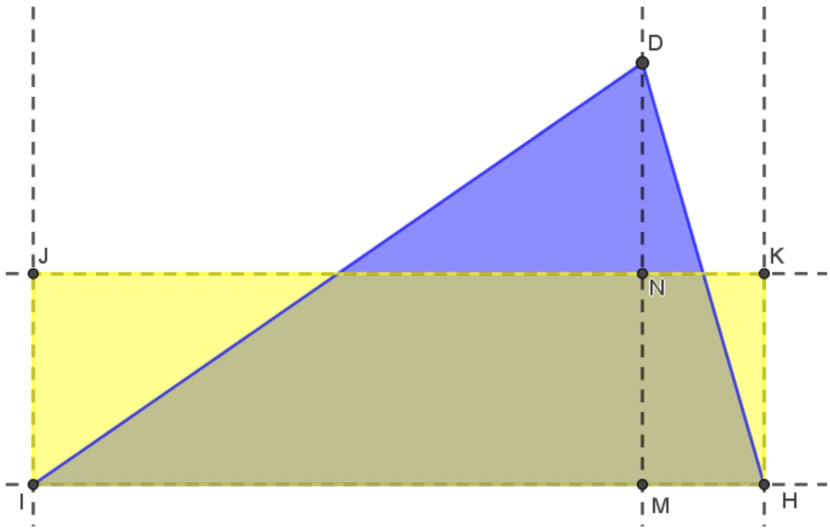

Figura 11. De triángulo a rectángulo, manteniendo el área

Para obtener el rectángulo ha bastado tomar la misma base y una altura igual a la mitad de la altura del triángulo.

Y, por último, la figura 12 muestra el cuadrado obtenido a partir del rectángulo anterior.

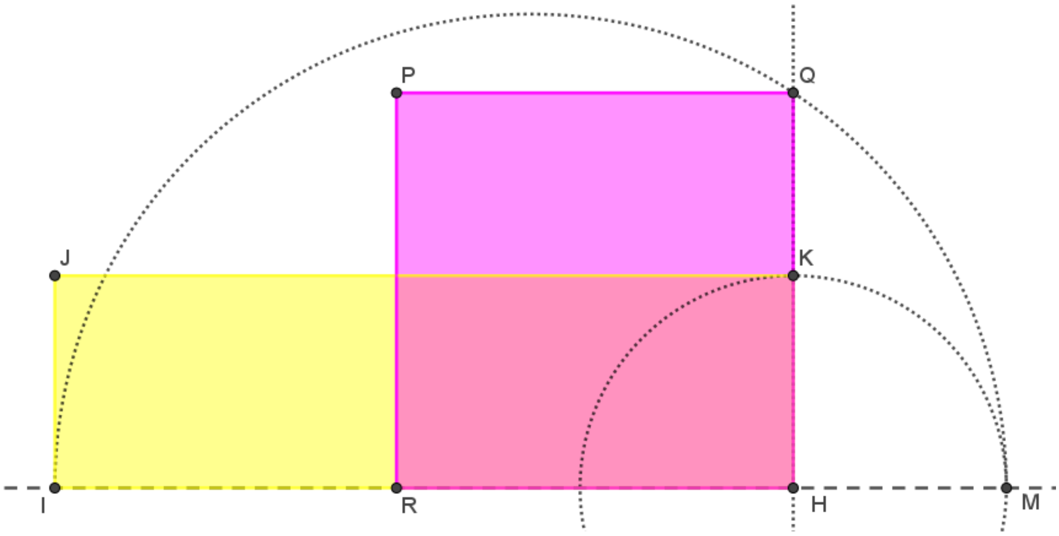

Figura 12. De rectángulo a cuadrado de igual área

6. Conclusión

Las construcciones expuestas en los apartados anteriores solo pretenden ser una muestra de ejemplos que se pueden proponer para cambiar los tradicionales cálculos de áreas y perímetros, por otras en las que prime la investigación, la experimentación y sobre todo la manipulación a través de las posibilidades que ofrecen recursos como GeoGebra.

De esta forma dejaremos los procesos mecánicos a un lado para dedicar más atención a pensar y descubrir relaciones entre los objetos, en este caso entre polígonos para transformarlos unos en otros manteniendo alguna propiedad.

Dejemos los cálculos y pasemos al descubrimiento para que las matemáticas sean vistas y entendidas de otra manera por el alumnado.

Referencias bibliográficas

Hauer, B.; Kovács, Z.; Recio, T.; Vélez, M.P. (2018), Automated reasoning in elementary geometry: towards inquiry learning. Paedagogische Horizonte. 2(2), pp. 27-39, 2018.

Recio, T.; Van Vaerenbergh, S.; Vélez, M. P. (2020), “Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven”. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, páginas 08-15. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202

Recio,T.; Richard, P.R:; Vélez, M.P., (2019), Designing Tasks Supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the Development of Mathematical Skills. International Journal of Technology in Mathematics Education, 2019, Vol 26, No 2, pp. 81-89**)**

https://www.mongge.com/

http://www.matematicasvisuales.com

http://geometriaanaliticacetmar20.blogspot.com

www.geogebra.org

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Director del Instituto GeoGebra de Andalucía (España), secretario general de la FESPM y de la FISEM.