



## **El Laboratorio de Matemáticas: una estrategia de producción y uso de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas**

Octavio Augusto Pabón Ramírez  
Área de Educación Matemática, IEP  
Universidad del Valle  
Colombia  
[augpabon@yahoo.com](mailto:augpabon@yahoo.com)

Jorge Hernando Arce Chaves  
Área de Educación Matemática, IEP  
Universidad del Valle  
Colombia  
[joarce@gmail.com](mailto:joarce@gmail.com)

Myriam Belisa Vega Restrepo  
Área de Educación Matemática, IEP  
Universidad del Valle  
Colombia  
[myvega43@gmail.com](mailto:myvega43@gmail.com)

Diego Garzón Castro  
Área de Educación Matemática, IEP  
Universidad del Valle  
Colombia  
[digar27@yahoo.es](mailto:digar27@yahoo.es)

### **Resumen**

El Laboratorio de Matemáticas del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia, es una estrategia didáctica de diseño y utilización del material para el estudio de actividades desarrolladas autónomamente por los participantes. Las investigaciones que han problematizado la integración de recursos pedagógicos y los procesos de cualificación y actualización de docentes han hecho evidente la necesidad de una ampliación teórica y metodológica de algunos de los presupuestos fundantes del Laboratorio de Matemáticas. Así se plantea la posibilidad de integrar algunos de los

constructos teóricos de la *aproximación instrumental*, y contribuir a la reconceptualización de la noción de recursos pedagógicos, en el marco del proyecto Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conocimiento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica, que desarrolla el Grupo de Educación Matemática, GEM. (Contrato 110648925213 COLCIENCIAS – Universidad del Valle).

*Palabras clave:* Laboratorio de Matemáticas, recursos pedagógicos, matemáticas experimentales, aproximación instrumental

## **Introducción**

La Didáctica de las Matemáticas ha venido evolucionando notoriamente en las últimas décadas, gracias a la paulatina consolidación del campo de la Educación Matemática, entendido éste como un campo interdisciplinario de investigación. Sin embargo, a pesar de estos avances teóricos, se advierten resistencias de diversa índole para problematizar desde una perspectiva didáctica, la naturaleza experimental de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una muestra de un cambio cualitativo en relación a esta situación es la creciente importancia al interior de la comunidad de investigadores y educadores matemáticos en favor de iniciativas dirigidas a la conformación y estructuración de escenarios experimentales, tales como los Clubes de matemáticas y los Laboratorios de Matemáticas

Estas aproximaciones a la dimensión experimental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas parten del reconocimiento del aprendizaje de las matemáticas como un proceso constructivo, lo cual significa que los alumnos tienen, descubren y crean habilidades y conocimientos matemáticos, y que por lo regular lo hacen en el marco de las actividades sociales en que se proponen tal aprendizaje. Por consiguiente, la enseñanza de las matemáticas en el aula se alejaría del modelo de la transmisión de la información donde el profesor es el proveedor y los alumnos son los receptores pasivos del conocimiento y habilidades matemáticas.

De igual manera, se reconoce que los contextos significativos y auténticos juegan un papel crucial en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas. Los nuevos conceptos y habilidades serán encontrados primero en los retos que plantean las situaciones problema derivadas de experiencias de la vida cotidiana o de explorar fascinantes mundos imaginarios. Estas situaciones pueden presentarse en forma de historia, dibujo, obra (dramática), entre otros. Tales contextos deben seleccionarse y prepararse cuidadosamente para aumentar la probabilidad de que las invenciones y construcciones de los alumnos relacionadas con las habilidades y los conceptos matemáticos que se espera se aprendan, sean en verdad pasos útiles y apropiados para el aprendizaje. En este sentido, se señala que es esencial que los contextos de los problemas representen la diversidad, la complejidad y la ambigüedad de las situaciones problemas que los alumnos pueden encontrar fuera de la clase de matemáticas.

En la perspectiva del trabajo experimental se señala la importancia de la manipulación, los modelos visuales, los esquemas y los diagramas, que pueden ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los alumnos y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales, del otro.

Los alumnos mismos deben, tanto como sea posible, jugar un papel en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas.

De esta manera emerge la concepción según la cual la importancia del trabajo experimental en matemáticas reside en la posibilidad de que los estudiantes puedan simular experiencias realizadas por los matemáticos que investigan. Se considera que el papel del estudiante en su trabajo intelectual se puede comparar por momentos con la actividad científica al considerar el aula de matemáticas como un laboratorio, pues allí se simularía la actividad del científico, ya que saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas, sino que implica que los estudiantes se ocupen de problemas, pero en ocasiones se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones.

Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles. Ahora bien, más allá de la concepción del salón de clases como un laboratorio, la idea de un escenario específicamente diseñado para el trabajo experimental en matemáticas ha cobrado una inusitada fuerza en el plano de la investigación en didáctica de las matemáticas.

El Laboratorio de Matemáticas en su formulación inicial ha buscado contribuir a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático, favoreciendo así el acercamiento hacia una cultura matemática en el marco de un ambiente lúdico y recreativo. En tal sentido, puede considerarse como un dinamizador de construcción de pensamiento matemático a través del proceso de aprendizaje, al no tener entre su funcionalidad el de ser complemento de los procesos escolares. Esto significa que no es necesariamente un escenario que busque dar continuidad a los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase. (Arce, 2004). En efecto, en su formulación inicial el Laboratorio se aleja de los procedimientos institucionales del aprendizaje y es transversal al currículo oficial de Matemáticas, lo cual le permite circular entre las posibilidades que le ofrece el apartarse de la linealidad de los contenidos establecidos y abordar conceptos que intervienen en el nivel de la Educación Básica, sin ninguna restricción de tiempos didácticos o indicadores de logros y prerrequisitos impuestos por el grado.

Ahora bien, desde una perspectiva didáctica se reconoce que este tipo de estrategias están estrechamente asociadas a las creencias y concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sobre la naturaleza y el rol otorgado a las matemáticas experimentales en estos procesos. De esta manera, es posible reconocer que sólo podrá integrarse efectivamente el Laboratorio de Matemáticas en la cultura escolar, en la medida que éste responda de alguna manera a las expectativas y necesidades de los docentes, estudiantes y directivos de una institución educativa. Se requiere entonces, un trabajo continuado de cualificación que permita reconocer los distintos matices en las propuestas de Laboratorios de Matemáticas y de integración de recursos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Un elemento consustancial a este proceso que ha surgido en las últimas décadas en el ámbito de la investigación es el estudio de las condiciones, dificultades y posibilidades involucrados en el diseño de escenarios experimentales, soportados fundamentalmente en la integración de tecnologías informáticas y computacionales. Se considera que estos nuevos escenarios podrían contribuir a mejorar el desempeño del estudiante en la realización de actividades cognitivas de nivel superior permitiéndole resolver problemas que exigen poner en

juego habilidades relacionadas con el razonamiento matemático.

Esto es justamente uno de los aspectos centrales de los fundamentos de las evaluaciones internacionales (PISA, TIMSS) pues se considera que tales habilidades son las que le van a permitir al individuo enfrentar exitosamente los retos de un mundo globalizado y tecnificado. Más aun, esta discusión llama la atención sobre la necesidad de replantear los programas curriculares, de manera que estos tengan una doble orientación: disciplinar y formativa, como lo sugieren los estándares internacionales. Se configura la posibilidad de realizar investigaciones relativas a los aprendizajes en escenarios experimentales que podrían clarificar en qué medida, estrategias de aprendizaje basadas en ambientes experimentales y en la integración de las TIC's repercuten en la disminución de bajos desempeños académicos en las pruebas estandarizadas.

En este orden de ideas, se hace evidente la necesidad de problematizar desde la didáctica de las matemáticas la naturaleza, alcances e implicaciones de las llamadas matemáticas experimentales y su conexión con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar, además de los nuevos desarrollos teóricos relativos a los denominados recursos pedagógicos.

### **La experimentación en las matemáticas**

Experimento es una palabra que no es usual asociar con las Matemáticas, más comúnmente se suele hablar de los experimentos refiriéndose a las Ciencias Experimentales o al conocimiento del medio en la etapa de Educación Primaria. Estas consideraciones hacen que el carácter revelador o transformador que tienen los experimentos, no se aborden en el aprendizaje de las Matemáticas.

El experimento es un factor pedagógico en el aprendizaje, al tener gran fuerza en la primera toma de contacto del niño con algunas ideas matemáticas que están estrechamente ligadas a fenómenos físicos de la vida cotidiana. Por ejemplo, horizontal, vertical, ángulo, minuto, rapidez y mínima distancia serán conceptos cuando hayan sido dotados de sentido y no a través de un aprendizaje meramente verbal. Un minuto ha de ser experimentado como "la duración de un ángulo ha de ser experimentado como una disposición de dos palillos o varillas; la horizontal no como una línea, sino como un estado físico. Una caminata de ocho kilómetros tiene probablemente en esa etapa de construcción de las ideas elementales, menos sentido que una caminata de dos horas (Hernán & Carrillo, 1991).

Experimentar con las Matemáticas representa, entre otras cosas, inventar, crear a partir de los propios medios para hallar caminos de solución a problemas que se han planteado, generado la opción de realizar descubrimientos (Battle, 1996). En el nivel de inicio de la construcción del pensamiento matemático, esta toma de contacto no tiene que ver mucho con definiciones o reconocimientos de conceptos, sino más bien con la formación incipiente de ideas en las que, tal vez más que nunca, lo esencial es el significado. Es en el desarrollo del experimento cuando se ponen de manifiesto las propiedades que serán las notas del concepto; de ahí que convenga variar el contexto y los materiales utilizados para favorecer una abstracción más completa y más estable. (Hernán & Carrillo, 1991).

En este punto es posible afirmar que en cierto sentido, las Matemáticas tienen mucho de común con las Ciencias Experimentales. La producción en Matemáticas se hace en procesos en los que conjeturas, rectificaciones, ensayos, revisiones, demostraciones y errores se entremezclan de manera escasamente lineal. Intuiciones, analogías, imágenes, preguntas son tan importantes durante la producción matemática como lo son la deducción y el rigor lógico. Es sólo al final cuando ha de exponerse el resultado en formas de supuestos iniciales, definiciones y teoremas, cuando la lógica de la deducción debe limpiar de errores y cuando las otras formas de razonamiento deben ceder la prioridad a la deducción. El hecho de que los objetos que las Matemáticas consideran no sean objetos físicos materiales tampoco es exclusivo de las Matemáticas. Todas las Ciencias tratan conceptos, esto es, objetos mentales, sean estos gravitación, plusvalía, fotosíntesis, oxidación, recursividad, polisemia o complejo de Edipo.

El elemento esencial donde las Matemáticas se alejan de lo experimental reside en que las experiencias no intervienen en la validación de los resultados matemáticos. La experimentación jamás dilucidará la verdad del axioma de las paralelas, la existencia de los números negativos o del valor de la afirmación de que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano; simplemente porque en el mundo físico no hay paralelas ni hay números.

Es en eso que las Matemáticas son autónomas, en que la validez de sus resultados depende en última instancia, de su estructuración interna, de la que la no-contradicción es el requisito *sine qua non*. En este sentido, la experimentación matemática es sobre todo experimentación mental; si para investigar o exponer un teorema acerca del triángulo o acerca de las funciones continuas se utiliza la imagen gráfica de un triángulo o el ejemplo de una determinada función, ese uso es siempre marginal, un apoyo sensitivo, un material para hacer más sencilla la comunicación.

Ante estas posiciones, es necesario establecer diferencias entre el construir Matemáticas en el ámbito de la investigación y el hacer Matemáticas en los procesos de aprendizaje en los niveles escolares; porque los conceptos no se adquieren en un instante, se forman en procesos en los que el conflicto cognitivo y las experiencias (tanto convergentes como contrapuestas) son agentes mentales imprescindibles. Y ocurre con frecuencia que la evidencia sensible es antagónica con las construcciones matemáticas.

Estas posibilidades implican aceptar, como constante didáctica, el error experimental, la intuición equivocada, la conjetura insuficientemente fundada. Convirtiéndose en momentos didácticos de importancia para generar proceso de aprendizaje.

Las actividades matemáticas que se presentan en el Laboratorio tienen alguna intención y van directamente encaminadas a potenciar los procesos de experimentación e indagación matemática, reuniendo características como:

- Ofrecer un atractivo a los participantes del Laboratorio, para que puedan integrarlas fácilmente en su mundo y buscarles solución o explicación.
- Generar la posibilidad de provocar el desarrollo de razonamientos propios y creativos.
- Tener un carácter marcadamente abierto para poder acoger distintos caminos de solución, que puedan plantear los distintos participantes.
- Propiciar la oportunidad de expresar de distintas formas las vías de solución y de explicación, utilizando quizás distintos lenguajes.
- Dar la posibilidad de trabajar con distintos tipos de materiales, no únicamente con papel y lápiz.

Por todo ello, el contexto experimental es imprescindible en el aprendizaje de los conceptos y en el establecimiento de conexiones entre ellos. Es así como la actitud experimental; por ejemplo, al aceptar el error y la imprecisión, sin la intención de instalarse definitivamente en ellos, considera didácticamente valioso que quien aprende construya algunos materiales, porque los problemas que se le presentan durante la construcción servirán para dar significado a los conceptos que intervienen en la representación que existe en el material. La actitud experimental, permite que para un pensamiento eficaz lo importante no sea estar siempre en lo cierto (si es que tal cosa pudiera darse), sino estar en lo cierto al final (Hernán & Carrillo, 1991).

## **Estructura del Laboratorio de Matemáticas**

El Laboratorio de Matemáticas parte de una estructura simple y funcional y toma como base de su configuración una unidad que llamaremos MESA. En ella se disponen los recursos pedagógicos (Fichas de trabajo, materiales manipulativos, documentos, software, equipos, elementos para estructurar una secuencia de clase, etc.) para que los usuarios enfrenten los retos y problemas enmarcados en el currículo del TIMSS que se dispongan en la temática de actuación de cada mesa. Por otra parte, hay problemas cuyas soluciones demandan la participación simultánea de dos o más mesas de trabajo. Dicha relación entre mesas constituye lo que se denomina una SECCIÓN del Laboratorio de Matemáticas. El nuevo Laboratorio de Matemáticas tiene proyectado iniciar con las mesas siguientes: Aritmética, Álgebra, Estadística y Probabilidades, Juegos Matemáticos, Prensa y Matemáticas, Geometría, Matemáticas del Consumidor, nuevas Tecnologías y el “Furgón de Matemáticas”.

La mesa de aritmética se encargará de ingresar problemas numéricos que involucren números, relaciones y operaciones entre ellos.

La mesa de álgebra planteará problemas que permitan crear perspectivas de generalización y modelación de marcos de referencia cambiantes tanto en ambientes numéricos como en el marco de estructuras matemáticas abstractas.

La mesa de geometría planteará problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con las propiedades de diferentes espacios y diferentes objetos y sus relaciones en dichos espacios.

La tradición del Laboratorio de Matemáticas le ha dado un peso muy especial a esta mesa, particularmente, en los problemas de geometría. En el proyecto de investigación en curso serán objeto de especial interés los problemas que circulan en los tres primeros y tres últimos grados de la educación básica colombiana.

La mesa de juegos matemáticos incorpora, desde diferentes perspectivas, juegos que se rigen con reglas acordadas previamente pero que tienen un trasfondo matemático claro y preciso. Hay una gran variedad de ellos.

Esta investigación le ha dado un peso muy especial a esta mesa, en particular, en lo que concierne a aquellos juegos que involucran elementos geométricos que circulan en los tres primeros grados de la educación básica colombiana.

La mesa de estadística y probabilidades incorpora problemas tendientes a la organización y procesamiento de diferentes tipos de datos con la intención de inferir de ellos, mediante el

cálculo de probabilidades, nueva información para la toma de decisiones.

La mesa de prensa y matemáticas extrae o crea a partir de diferentes medios de circulación nacional o internacionales diferentes situaciones problema que se relacionen con los diferentes tópicos matemáticos que abarca el TIMSS.

La mesa de matemáticas del consumidor incorpora el análisis de las situaciones matemáticas cotidianas en que se ve involucrado un consumidor local. Los problemas de las matemáticas financieras y las matemáticas del artesano tienen aquí un lugar preferencial.

La mesa de matemáticas y nuevas tecnologías incorpora el análisis de situaciones matemáticas que se proponen en ambientes de geometría dinámica y sistemas de álgebra computacional, con la intención de reconocer aspectos asociados a procesos de formación de pensamiento geométrico y de instrumentación e instrumentalización de las Tics.

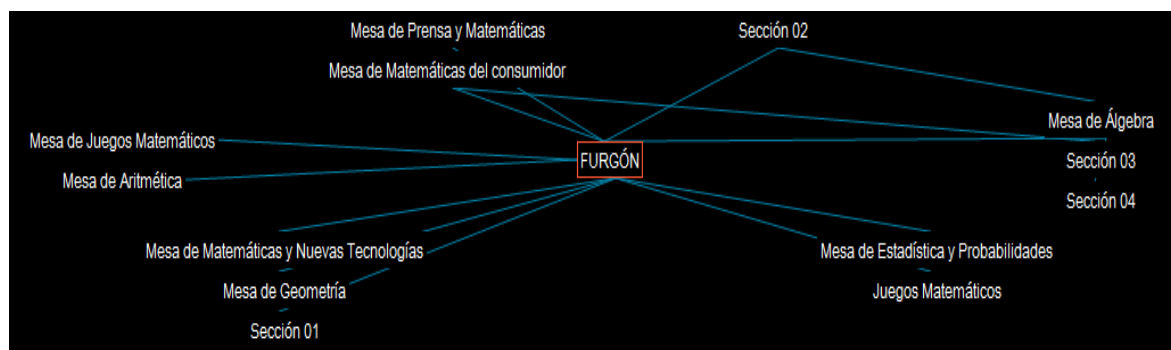


Figura 1. Estructura del Laboratorio de Matemáticas

### Descripción de una ficha de trabajo

Cada mesa se desarrolla a través del agrupamiento, sistemático, de lo que hemos denominado fichas de trabajo (Anexo A).

Las fichas que ingresan a cualquiera de las mesas del Laboratorio de Matemáticas tienen un diseño sencillo y práctico que permita su organización y manipulación tanto física como digitalmente. Cada ficha ha sido estudiada, previamente, por los miembros del furgón.

En el Anexo A, se muestra el esqueleto de la cara A (anverso) de la ficha donde en (1) se escribe el título de la ficha; en (2), el aspecto de contenido de la ficha utilizando los códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS; en (3), la descripción del problema; en (4), los dibujos, gráficos e información no escrita complementaria a la descripción del problema; en (5), un código de barras que indique la localización de la ficha en la base de datos física o digital y suministre datos e información complementaria para su manejo y, finalmente, en (6) se recogen las observaciones, la fuente bibliográfica, el autor o autores, año de publicación y otros datos que se consideren importantes.

La cara B (reverso) de la ficha, que se denominará bitácora, será un espacio que documentará la experiencia de poner en juego con los usuarios la ficha de trabajo respectiva. Se recogerán datos generales como: número de personas que han intentado resolverla, preguntas del usuario, dificultades detectadas, problemas de redacción, edades de los solucionadores, fechas de uso, soluciones encontradas, etcétera.

La información que se consigna en cada bitácora será estudiada por los miembros del furgón con miras a producir o mejorar recursos pedagógicos ya existentes, producir fichas nuevas o mejorar las fichas existentes, derivar documentos de divulgación para la formación inicial y profesional de los docentes de matemáticas, clasificar las soluciones dadas por los usuarios de cada ficha, hacer los soportes teóricos de las fichas, hacer esbozos de secuencias de clases basadas en algún subconjunto de fichas de una mesa del Laboratorio y, finalmente, sugerir diseños de materiales para acompañar el desarrollo de la ficha y, finalmente, derivar trabajos que ayuden a fortalecer la documentación de cada ficha y de la mesa en general.

### **La perspectiva instrumental y su proyección en el Laboratorio de Matemáticas**

Un número significativo de investigaciones realizadas en la última década se han centrado en cómo se lleva a cabo la integración de herramientas y la influencia de los maestros en este proceso. También se han abordado las dificultades de los profesores para realizar una integración efectiva de las herramientas en la enseñanza de las matemáticas. En relación con este asunto, se destaca el marco teórico propuesto por Artigue (2002), denominado la *instrumentación*.

De otra parte, debe reseñarse el debate sobre lo que específicamente constituye una herramienta. En relación con este asunto se destacan los aportes de investigadores franceses (por ejemplo, Artigue, 1997; Güin y Trouche, 1999; Lagrange, 1999; Trouche, 2003) quienes apoyados en el marco teórico de la instrumentación han propuesto diversas interpretaciones sobre la dinámica de la integración de las herramientas en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

Ahora bien, los investigadores señalan que la investigación histórica muestra claramente, en tiempos y en zonas geográficas dados, la existencia y la diversidad de herramientas utilizadas para el cálculo, como también para otros propósitos que reflejan las necesidades de cálculo de la sociedad en cuestión. Estas herramientas aparecen como viniendo tanto de la experiencia humana, como asistiendo la actividad humana. (Maschietto, Michela; Trouche Luc, 2010). En tal sentido se señala:

(...) Teniendo presente ambas invariantes (diversidad y articulación de herramientas) y esta evolución (hacia prácticas más experimentales), pensamos dirigir algunas preguntas relacionadas a la integración de herramientas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (¿existen buenos contextos, buenas prácticas de enseñanza y cómo es posible promoverlas?) dentro de la perspectiva del laboratorio de matemáticas. (Maschietto, Michela; Trouche Luc, 2010)

En este orden de ideas, estos investigadores proponen una estrategia que contempla la búsqueda de herramientas en la historia de la educación matemática y su estudio desde la perspectiva instrumental, el análisis de la noción de laboratorio de matemáticas, desde un punto de vista histórico, y la discusión de algunas experiencias de formación y cualificación de profesores de matemáticas. Trouche y Güin (2008) introducen igualmente una idea mucho más compleja en relación con los recursos: concebir los recursos pedagógicos como artefactos, que se constituyen en instrumentos dentro de comunidades de práctica emergentes. A partir de esta idea, se propone una reflexión interdisciplinaria sobre el desarrollo de recursos para el docente y se reconoce que una vez estos estén dentro de una comunidad de práctica, se debe dar tiempo a los



profesores, para que logren un clima de confianza que permita la adhesión de otros actores.

En consonancia con lo expuesto es posible señalar que la integración de recursos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas necesita sin duda una renovación de las prácticas profesionales. Esta renovación supone proporcionar a los profesores una asistencia específica. Esta asistencia comprende necesariamente una formación continua que es la clave del desarrollo de los ambientes computacionales de aprendizaje. Ahora bien, parece ser una tendencia generalizada e improductiva que esta formación continua esté organizada en general bajo la forma de una capacitación durante algunos días, sin relación directa con las clases, y sin repercusiones efectivas sobre sus prácticas profesionales. (Trouche, 2002).

De acuerdo con Drijvers y Gravemeijer (2005), la aproximación instrumental para aprender a usar herramientas surge en el marco de los trabajos sobre la ergonomía cognitiva (Rabardel, 1995). Las ideas de Vygotsky (1978) de cómo las herramientas median el aprendizaje pueden considerarse como las bases de esta aproximación. En Francia, los investigadores y educadores matemáticos (Artigue 1997, Güin & Trouche 1999, Trouche 2000, Lagrange 2000) se han apoyado en la aproximación instrumental para el aprendizaje de las matemáticas usando herramientas informáticas y computacionales. Se considera que un asunto central en el trabajo de Vygotsky es la idea que las herramientas median entre la actividad humana y el ambiente. Estas herramientas de naturaleza histórico - cultural pueden ser artefactos materiales - como calculadoras o computadores - pero también herramientas cognitivas, como el lenguaje o los símbolos algebraicos. Rabardel (1995) elabora esta distinción señalando que un artefacto “desnudo” no es automáticamente un instrumento mediado. El artefacto, el objeto material u abstracto, el cual es dado al usuario para soportar un cierto tipo de actividad, puede ser un objeto sin sentido a menos que el usuario lo haya usado antes o haya visto a otros usándolo. Sólo después de que el usuario haya desarrollado unos medios para usar el artefacto para un propósito específico que él considere pertinente, la herramienta se vuelve parte de un instrumento valioso y útil que media la actividad y que es construida por el usuario. El usuario experimentado desarrolla de esta manera una serie de habilidades para usar la herramienta de una manera hábil y llega a determinar en qué tipo de circunstancias es útil.

Como lo han caracterizado Rabardel (1995) y Verillon y Rabardel (1995), es posible hablar de un instrumento cuando hay una relación significativa entre el artefacto - o una parte del artefacto - y el usuario para tratar con cierto tipo de tarea. En el campo de la didáctica de las matemáticas, la atención se centra en tareas matemáticas que el usuario tiene la intención para resolver. La herramienta se desarrolla en un instrumento a través de un proceso de apropiación que permite a la herramienta mediar la actividad. Durante este proceso, el usuario desarrolla esquemas mentales que organizan tanto la estrategia de resolución del problema, los conceptos y teorías que forman la base de la estrategia, y los medios técnicos para usar la herramienta.

El instrumento, por lo tanto, no consiste solo de una parte del artefacto u herramienta que está involucrado, sino que solo puede existir gracias al acompañamiento de esquemas mentales del usuario, quien conoce como hacer un uso eficiente de la herramienta para llevar a cabo el tipo de tareas propuestas. El instrumento involucra tanto el artefacto y los esquemas mentales desarrollados para una clase de tareas dadas. La aproximación instrumental, permite establecer un vínculo y distinción entre el artefacto y el instrumento e igualmente introduce la categoría de génesis instrumental, para dar cuenta del proceso de “nacimiento” de un instrumento. Esta génesis instrumental involucra el desarrollo de esquemas mentales, emergiendo de esta manera el problema de como identificar y observar su desarrollo.

De manera general, se considera que la génesis instrumental, concierne a la emergencia y evolución de esquemas de utilización, en la que los elementos técnicos y conceptuales co-evolucionan. Drijvers y Gravemeijer (2005), subrayan que la relación entre los aspectos técnicos y conceptuales es bidimensional: de una parte, las posibilidades y restricciones del artefacto moldean el desarrollo conceptual del usuario; las concepciones del usuario, de otra parte, cambian las formas en la cuales él o ella usan el artefacto, y pueden aun llevar a cambiar el artefacto o personalizarlo. Estas dos dimensiones se reflejan en la diferencia entre instrumentación e instrumentalización. También se afirma que aunque la génesis instrumental es frecuentemente un proceso social, los esquemas de utilización son individuales. Diferentes estudiantes pueden desarrollar esquemas diferentes para el mismo tipo de tarea, o para usar un comando similar en el ambiente tecnológico. Siguiendo a Drijvers y Gravemeijer (2005), en la práctica, la construcción de esquemas, la génesis instrumental, no es fácil y requiere tiempo y esfuerzo. Los estudiantes pueden construir esquemas que no son apropiados, ni eficientes o que están basados en concepciones inadecuadas. En esta instancia de ampliación teórica del Laboratorio de Matemáticas, adoptamos algunos referentes teóricos de la aproximación instrumental (Rabardel, 1997) y ampliaciones en relación con los procesos de instrumentalización e instrumentación, que dan cuenta del proceso de transformación de un artefacto digital y / o físico dado en un instrumento de trabajo matemático (Güin, Ruthven, & Trouche, 2004).

Los elementos teóricos enunciados son un referente central del interés de ampliar teórica y metodológicamente la propuesta del Laboratorio de Matemáticas. Apoyándonos en Artigue y Bardini (2010) se pretende considerar el papel que juega el conocimiento matemático en la génesis instrumental, a partir de la asunción de que tal análisis no puede hacerse sin tomar en cuenta las características de las tareas propuestas a los participantes del Laboratorio y el interés didáctico subyacente al trabajo en la mesa de investigación, a partir del estudio y análisis de sus producciones. La metodología propuesta se apoya tanto en el análisis de los elementos involucrados en diseño de fichas y materiales informáticos como en el desarrollo de la actividad de los participantes. El análisis de la actividad de los participantes se plantea a partir del estudio del registro de las producciones de las mesas y sección señaladas, así como también en registros filmicos y de audio de tales actividades. Eventualmente podrán ser usados cuestionarios y entrevistas desarrollados de manera independiente de las actividades del Laboratorio de Matemáticas.

De otra parte, las investigaciones recientes desarrolladas en relación con los procesos de génesis instrumental, destacan la importancia de que los participantes tengan antecedentes formativos comunes y que compartan cierta sensibilidad a consideraciones didácticas. (Artigue; Bardini, 2010). Este es un elemento que es considerado por los investigadores como un factor positivo para obtener niveles crecientes de compromiso, en condiciones de armonía y ha sido percibido como un valor adicional, en el caso de profesores participantes. (Artigue; Bardini, 2010).

En este orden de ideas, se hace evidente la necesidad de que los participantes discurren en paralelo por un proceso de instrumentalización de las mesas y sección del Laboratorio seleccionadas y el proceso de discusión didáctica de las producciones correspondientes a los mismos participantes y / o correspondientes al archivo del Laboratorio en su escenario natural: el furgón (mesa de investigación)

Ahora bien, esta decisión plantea dos niveles interrelacionados pero con rasgos característicos distintivos, los cuales demandan análisis diferenciados en relación con la génesis instrumental: Por una parte, el recurso constituido por las mesas señaladas plantea un nivel de instrumentalización inicial que deberá ser documentado. De otra parte, la experimentación de las actividades propuestas en las fichas y/ o en otros recursos diseñados que contemplan el uso de herramientas informáticas y computacionales plantea otro nivel de instrumentalización que demanda básicamente el análisis de la interacción existente entre el contenido matemático y la instrumentación. De esta manera se reconoce que los participantes deben asumir y familiarizarse con el Laboratorio como un recurso y con los recursos pedagógicos presentes en las mesas del Laboratorio.

Esta particular condición, parece relacionarse con otro de los hallazgos de investigaciones recientes del proceso de génesis instrumental. En efecto, se reconoce el impacto de nuevas clases de distancias instrumentales (Haspekian & Artigue, 2007) y de cercanías que dan forma a las actividades de estudiantes y docentes: de una parte, la distancia frente a herramientas matemáticas más familiares, como las calculadoras gráficas y simbólicas, y de otra parte cercanías con artefactos tecnológicos disponibles fuera de la escuela (computadoras, IPod, entre otros). De acuerdo con Artigue y Bardini (2010), estas características afectan de manera diferenciada a profesores y estudiantes e inclusive afectan diferentemente a personas que pertenecen a la misma categoría, de acuerdo a sus características y experiencias personales. Estas características pueden tener tanto influencias negativas o positivas en los procesos de enseñanza y aprendizaje y requieren ser mejor comprendidas.

En este orden de ideas, emerge la hipótesis de que probablemente se configure una distancia instrumental en relación con la propuesta de trabajo en Mesas del Laboratorio y el trabajo con recursos manipulativos y una cercanía con algunas de las herramientas informáticas y computacionales presentes en las actividades propuestas que involucran, por ejemplo, el uso de Ambientes de Geometría Dinámica o Sistemas de Algebra Computacional, que han recién han empezado a ser parte de las actividades habituales de las clases de matemáticas.

De igual importancia es la eventual introducción en esta perspectiva de algunos de los presupuestos teóricos de la Dialéctica herramienta / objeto (Douady, 1986) para el estudio del componente instrumental de las actividades de profesores y estudiantes. Se asume que la decisión de articular conocimientos matemáticos e instrumentales remite inevitablemente al interior de un contexto matemático específico. De igual manera, se considera que la reinversión de conocimiento instrumental requiere que los estudiantes, incluso implícitamente, descontextualicen y hasta cierto punto generalicen lo que ha sido adquirido (Artigue; Bardini, 2010).

En general, nuestra propuesta se apoya en la hipótesis que es posible abordar la discusión sobre la naturaleza y posibilidades de integración en el aula de las matemáticas experimentales, a partir del estudio del rol que cumplen los artefactos, instrumentos y recursos en el trabajo matemático desarrollado por estudiantes y profesores tanto en ambientes tradicionales (por ejemplo, Laboratorios de Matemáticas) como en ambientes que integran recursos informáticos y computacionales. Es en este sentido que planteamos la posibilidad de integrar algunos referentes teóricos de la aproximación instrumental del aprendizaje de las matemáticas, en la búsqueda de una reconceptualización de la noción de recursos pedagógicos que amplíe el horizonte teórico y metodológico de las matemáticas experimentales y permita reestructurar los procesos de formación y cualificación de docentes de matemáticas.

### Referencias y bibliografía

- Arce, Jorge (2004) El Laboratorio de Matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle, Cali, Colombia
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3): 245-274.
- Artigue, Michèle; Bardini, Caroline (2010) New didactical phenomena prompted by TI-nspire specificities – the mathematical component of the instrumentation process. En: Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France INRP. Consultado en: [www.inrp.fr/editions/cerme6](http://www.inrp.fr/editions/cerme6).
- Battle, A. (1996). Experimentos en clase de matemáticas de primaria. En: UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Laboratorio de Matemáticas. N° 7. Graó. Barcelona.
- Drijvers Paul; Gravemeijer, Koeno (2005) Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In D. Guin., K. Ruthven and L. Trouche (Eds). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Chapter 7, pp. 163-196, Springer.
- Drijvers, P., Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 363-392), Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives.
- Guin, D; Ruthven, K; Trouche, L. (eds.) (2004) *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (contributions of M. Artigue, P. Drijvers, P. Elbaz-Vincent, J.B. Lagrange, M. Kendal, R. Pierce & K. Stacey), Springer.
- Guin, D. et Trouche, L. (eds) (2002) *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, Éditions la Pensée Sauvage, Grenoble.
- Hernán, F. y Carrillo, E. (1991). Recursos en el aula de matemáticas. Editorial Síntesis. Madrid. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. N° 34.
- Lagrange J.B., Artigue M., Laborde C. & Trouche L. (2003) Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 239-271). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti M.A. (2002) The influence of technological advances on students' mathematics learning, in L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695-723). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rabardel P. (1995) Les hommes et les technologies -approche cognitive des instruments contemporains
- Trouche L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques: quel usage pour quel apprentissage? *Educational Studies in Mathematics* 55:181-197
- Trouche L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques: quel usage pour quel apprentissage? *Educational Studies in Mathematics* 55:181-197
- Trouche, L. (2003). Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment: Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations. Communication presented at CAME 3: Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction. Reims, France, June 2003.

Trouche, L. (2003b). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. Thèse d'habilitation, Université Paris 7.

Trouche, L. (2005), Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trough (Eds.), The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument, pp. 9-39. NY: Springer.

Trouche, L. (2005), Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trough (Eds.), The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument, pp. 9-39. NY: Springer.

Verillon P. & Rabardel P. (1995) Cognition and Artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, European Journal of Psychology of Education 10, 77-103.

Vygotsky L.S. (1978) Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

## Apéndice A

### Modelo de Ficha de Laboratorio



LABORATORIO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



I

ÁREA DEL CUADRADO	
Áreas de Figuras Geométricas	
<p>Los vértices del cuadrado punteado descansan sobre los puntos medios del otro cuadrado. ¿Cuál es el área del cuadrado punteado si sólo dispones como unidad de medida la región triangular sombreada?</p>	
<p>* Preparado por: Jorge Arce</p>	

C013