3. LA VIDA SIMBÓLICA Y EL APRENDIZAJE

LUIS MORENO ARMELLA[1]

[1]Jefe del departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. lmorenoarmella@gmail.com

1. LA CULTURA SIMBÓLICA Y LAS MATEMÁTICAS

El mundo humano no está hecho exclusivamente de objetos materiales. En ese mundo existe la amistad, la educación, la corte suprema de justicia. Y ninguna de estas cosas tiene peso, volumen o temperatura. Están hechas de otra sustancia, a saber, la sustancia simbólica.

La escritura constituyó un punto de inflexión en nuestro desarrollo. El impacto que ha tenido la escritura desde sus orígenes ha sido enorme. Primero, suministró un soporte externo para la memoria y muy pronto se constituyó en un espacio de representación de nuestro propio conocimiento. Cada vez que leemos un escrito propio, por ejemplo, reorganizamos nuestras ideas y las vamos puliendo en un proceso que recuerda al trabajo de un escultor. Podemos llegar a límites insospechados de detalle en una narración o alejarnos y producir el relato a grandes rasgos. Es decir, la escritura permite diversos niveles de resolución de un texto. Podemos introducirnos en los pensamientos de un personaje de novela, llegar a conocerlo íntimamente o percibir su presencia en la historia de manera tangencial. Ahora bien: ¿de dónde proviene esa certeza sobre la existencia de un personaje que por otra parte es “solo” fruto de la imaginación del novelista? El escritor trae a su escritura rasgos de personas cotidianas y las transforma creando un mundo simbólico. Ese mundo simbólico tiene una existencia que puede llegar a ser tan tangible como la del mundo material. El Quijote, Hamlet, Pedro Páramo, Aureliano Buendía existen de modo tan estable como las montañas de los Himalayas. No tienen peso ni densidad, tampoco color ni temperatura, pero ahí están, impactando la vida de miles de personas en todo el mundo.

Algo similar ocurre con los números naturales. Sin ellos no hay horas ni cumpleaños. Entonces ¿de qué sustancia están hechos que se hacen notar de maneras tan conspicuas? Igual que la escritura, están hechos de una sustancia simbólica. Cuando abrimos los ojos en la mañana es inevitable ver la numerosidad en lo que nos rodea y así es. Y así ha sido desde tiempos inmemoriales. Pero hay que distinguir entre esa expresión rudimentaria de la numerosidad y otra muy distinta el número como cristalización simbólica de la acción humana de contar. Los números son el producto de un complejo proceso de re-descripción representacional que toma una experiencia (que bien podría pertenecer ya al ámbito de lo simbólico) y vía un proceso iterativo va refinando su versión simbólica.

Platón explicaba que todo aquello que dibujamos y escribimos sobre una superficie son las sombras de los verdaderos objetos que existen en toda su plenitud en un lugar que él ubicaba más allá de las estrellas. Ese era el mundo donde existían los números, los triángulos y demás objetos reconocidos por la cultura matemática griega. Aquellos símbolos y grafías pues, no eran, según él, sino las sombras de los verdaderos seres, de los que existían en la realidad de ese otro mundo. Esa sensación de realidad que se percibe y que otorga tanta confianza cuando uno está enfrascado en la resolución de un problema, ha hecho que una gran parte de los matemáticos profesionales de diversas épocas se hayan confesado platónicos. No podemos soslayar que el mundo simbólico, para el ser humano, es tan real como el mundo de los objetos materiales. Aunque su sustancia sea otra.

2. LA APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO

He vivido las matemáticas casi todo el tiempo desde el salón de clases y ha acompañado las reflexiones de colegas tan perplejos como yo mismo ante las condiciones casi invisibles del aprendizaje. El aprendizaje de personas, los estudiantes, que tienen el mismo nivel de complejidad que el observador. Aprendizaje: ese es el territorio en donde se funden lo subjetivo con lo objetivo. Se funden, porque aprender es volver a vivir el conocimiento.

Desafortunadamente no siempre se tiene conciencia de ello. Hace unos años tuve un profesor que hablaba lentamente y de manera reflexiva pero siempre dirigiéndose a sí mismo. En medio de una explicación se detenía como obedeciendo una orden interna mientras sostenía un diálogo privado sobre algo que le inquietaba, que venía a su mente en aquel momento. Para él era como un instante de sosiego mientras, con aire un poco distraído, estiraba el brazo mientras su índice recorría una curva muy suave tratando de hallar, de sentir un punto de inflexión en aquella gráfica que él percibía en un espacio imaginario. No dudo que sea casi imposible vivir las matemáticas al margen de esa realidad tangible de un mundo poblado de seres invisibles pero que distan mucho de ser evanescentes. Tal vez habría empleado otras palabras pero, estoy seguro, que aquel profesor creía que esos seres vivían en un mundo inmaterial pero tan real como las piedras. Nosotros, sus alumnos, veíamos aquella escena con mucha curiosidad. Nos preguntábamos entonces en qué estaría pensando cuando caía en aquellos trances tan placenteros a simple vista pero desconocidos para los demás. Algunos perseveramos, tal vez asistidos por un fuerte sentimiento de curiosidad, pero casi todos renunciaron a tratar de penetrar en aquella realidad escondida.

¿Acaso la educación tiene que ser un proceso cruelmente darwiniano?

Creo que ninguno de nosotros estaría dispuesto a dar una respuesta positiva a este interrogante. Pero es claro que responderlo involucra mucho más que un catálogo de buenas intenciones. Aún hoy en día se suele escuchar que para “enseñar bien” las matemáticas hay que saber matemáticas. En efecto, hay que saber matemáticas, pero ¿cómo debe ser ese saber?

Es una pregunta tan compleja que ha requerido mucha investigación intra, inter y trans disciplinar. Sin embargo, hay ideas que el campo de la didáctica de las matemáticas ha puesto sobre la mesa para elaborar una respuesta. Una de ellas afirma que disolver las dificultades que enfrentan los alumnos pasa por investigar el modo de existencia y el desarrollo del significado de los entes/objetos matemáticos. Es menester estudiar este problema desde la perspectiva del investigador mucho antes de someterlo a la ingeniería del diseño curricular. En efecto, no se logra hacer tangible la realidad de los entes matemáticos si se les aisla del terreno de la experiencia de los estudiantes. Y eso lo muestra la investigación de campo. La experiencia numérica, digamos, se va desarrollando gradualmente y llega un momento cuando se hace viable el pasaje a la exploración interna del sistema numérico, es decir, la exploración de las reglas con las que se operan los propios símbolos. ¡Los números son para contar y también para detectar los números primos!

Las matemáticas son tal vez la forma más simple de conocimiento científico. Simple no quiere decir trivial en el sentido justamente que los matemáticos atribuyen al vocablo de marras. Los sumerios vivieron el ruido de lo concreto- cotidiano hasta el momento en que lograron descontextualizar sus sistemas numéricos. Lo abstracto es simple y a la vez polisémico y de allí la enorme riqueza interpretativa de los hechos matemáticos. Una ecuación, por ejemplo, sirve para modelar innumerables situaciones físicas, como la ecuación de onda que describe la luz y también el sonido entre muchos otros fenómenos de carácter ondulatorio.

3. LA INTUICIÓN Y EL ANÁLISIS

Todo lo anterior me lleva a una reflexión sobre los mecanismos de conocer y su dimensión simbólica. Los seres humanos poseemos una forma de conocer híbrida y por lo tanto nuestro conocimiento también es híbrido. El lunes mientras leemos un artículo intuímos que la afirmación del autor no puede ser válida. No sabríamos en ese momento argumentar lógicamente sobre el porqué de nuestra aseveración, pero sentimos que tenemos razón. Más tarde, después de un esfuerzo sostenido, logramos dar con una argumentación que no deja duda alguna: teníamos razón. Es decir, nuestra intuición era correcta. Es como si tuviésemos un mecanismo cognitivo que se adelanta al razonamiento lógico. No es fácil dar una respuesta categórica a esta especie de dualidad en la naturaleza de la comprensión. Sin embargo, hay ejemplos de ella en diversas disciplinas, incluso deportivas. Un famoso futbolista escribía en su autiobiografía que en un encuentro crucial del campeonato mundial de repente dio media vuelta y colocó el pase que condiciría al gol de la victoria. Cuando le preguntaron cómo lo había hecho respondió: simplemente lo hice: hay una forma de saber que antecede a la comprensión. Hay una forma de saber que uno “no sabe que sabe”. Eso puede ser resultado de la práctica prolongada, del nivel de compenetración con una disciplina, pero no deja de tener su grano de sal, pues a medida que profundizamos en un campo, las intuiciones se van haciendo más certeras. Es como si la intuición quedara subirdinada, por lo menos parcialmente, a los mecanismos formales de una disciplina. Esta dualidad que parece emerger entre dos formas de conocer (la intuición y lo analítico) también tiene una identidad que ha sido investigada desde las neurociencias. Merlin Donald (A Mind so Rare, 2001) sostiene que a lo largo del desarrollo de la especie, el universo trabajó como un escultor sobre el sistema nervioso fijando en él su propia imagen y, en consecuencia, generando respuestas viables de una especie frente a su entorno. Esa forma de inteligencia instalada en el sistema nervioso, que nosotros también habríamos heredado, nos permitiría un trato directo con el entorno —ahora un entorno saturado por los efectos de la acción humana—revelando las aristas de eso que llamamos pensamiento intuitivo, pero ya marcado por la atmósfera de la cultura en la que tiene lugar nuestro desarrollo. Si es cierto que nuestra capacidad predictiva tiene su origen en el movimiento (I of the Vortex, R. Llinás, 2001, MIT), eso explicaría la sensibilidad ante todo lo que se mueve. Una mariposa en estado de absoluta quietud es invisible sobre la corteza del árbol, pero revela su presencia a su predador a través del movimiento. En los seres humanos, el control conciente de los movimientos del cuerpo nos regaló una mano tan fina y flexible que Kant la llamó la parte visible del cerebro. La mano nos regaló, además, la posibilidad del lenguaje articulado (The Hand and the Brain, G. Lundborg, 2014, Springer). Han sido tan profundas las consecuencias de esta conciencia del movimiento, que gran parte de los esfuerzos matemáticos desde hace ya siglos, han insistido en redescribir el movimiento en términos simbólicos. Uno de los resultados más profundos ha consistido en el desarrollo de las matemáticas de la variación y la acumulación cuya versión clásica, el cálculo infinitesimal, se tornó uno de los recursos predictivos centrales de las ciencias físicas. Hoy en día, la tecnología contemporánea ha permitido la simulación del movimiento sobre las pantallas digitales y con ello la educación adquiere un instrumento de mediación que puede detonar una nueva convergencia entre el pensamiento corporizado y el pensamiento simbólico, pero ahora en el escenario de la cultura humana.

La geometría dinámica es, posiblemente, una de las vías reales que Euclides no pudo revelar al rey Ptolomeo.

4. LA MEDIACIÓN DE LOS ARTEFACTOS

El ser humano ha sido capaz de trascender muchas de las limitaciones de su organismo y de su mente. Un teléfono permite comunicarse con un amigo a miles de kilómetros de distancia. Podemos sumergirnos en la realidad virtual de una novela cómodamente sentados en un avión que cruza el Pacífico.

La supervivencia de la especie llevó anuestros antepasados a proveerse de herramientas que les permitieran sobreponerse a un medio ambiente que les resultaba, las más de las veces, hostil y en donde las dificultades para hallar alimentos eran formidables. Si trazáramos una línea de tiempo empezando en los orígenes de nuestra especie, podríamos colocar sobre ella las primeras herramientas: una piedra afilada, una lanza rústica y algunas otras, todas con un ¿mensaje ¿grabado ¿sobre ¿ellas: herramientas para la supervivencia de la especie.

Hasta aquí hemos aportado ejemplos de herramientas materiales orientadas básicamente a extender las capacidades de nuestro organismocon el propósito de transformar el medio material. Las tecnologías simbólicas, la escritura por ejemplo, no van orientadas hacia afuera sino hacia adentro e nosotros. El impacto sobre el pensamiento, sobre la organización y preservación del conocimiento señala que el destinatario de sus mayores efectos es la persona misma. En su obra maestra, Oralidad y Escritura, Walter Ong (2002) enfatiza que muchas de las características que damos por sentadas en el pensamiento, en la literatura, en la filosofía y en la ciencia no son inherentes al ser humano como tal, sino que son resultado de la tecnología de la escritura que las ha dispuesto ala conciencia humana.

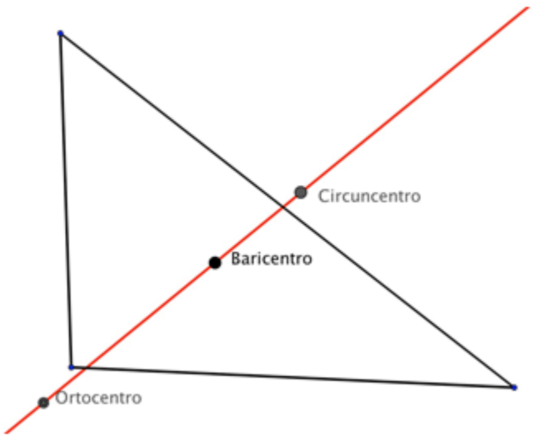
Estas palabras insinúan ya lo que muchos investigadores posteriormente han señalado: que, si bien nacemos con un cerebro predispuesto para adquirir un lenguaje, esa capacidad potencial solo alcanza su realización plena en un medio social y cultural. Somos seres híbridos que si bien compartimos nuestra herencia genética en mayor o menor grado con las demás especies, poseemos además una capacidad simbólica que es menester despertar desde nuestro nacimiento para que nuestro desarrollo sea pleno. Insistamos: la mente humana se constituye a partir de la interiorización del lenguaje. Además de la lengua materna, el lenguaje incluye otros sistemas simbólicos, por ejemplo, toda la estructura de gestualidad que poseemos los seres humanos de todas las culturas

Importa ir un poco más lejos en la descripción de cómo tiene lugar la interiorización de otros sistemas simbólicos de mediación, en particular las matemáticas. En su obra, Voces de la Mente (1991), J. Wertsch ha puesto un énfasis muy particular es la naturaleza mediada de la actividad humana. Lo ha dicho así:

> *La afirmación más crucial que deseo desarrollar es que la acción humana emplea demanera fundamental la mediación de herramientas y del lenguaje y que esas mediaciones determinan de maneras profundas la acción humana* (p. 12).

De acuerdo con Wertsch, dependemos de los instrumentos simbólicos de mediación para realizar nuestras actividades cognitivas. No podríamoshacerlo al margen de dichos instrumentos. Interiorizar los instrumentos cognitivos puede entenderse como el proceso de instalación de un nuevo instrumento de mediación en una sistema cognitivo que dicho sea de paso, siempre está en construcción. Cuando un niño aprende a contar cada vez llega más lejos en la lista y poco apoco va descubriendo, en interacción con los adultos cercanos, que esa lista no tiene fin. Esa situación abre un camino para accederá la noción de infinito. Nada de esto sería posible sin la mediación del sistema numérico elemental. Cuando pensamos en objetos materiales o distancias no logramos desentrañar ladiferencia entre infinito y muy grande. Ese sistema numérico hace más poderosa la mente del niño. No esque el sistema numérico amplifique nuestra capacidad de contar, sino que la hace posible. Es decir, no hay una capacidad cognitiva instalada de origen, sino quees la incorporación de los instrumentos cognitivos lo que construye dicha capacidad cognitiva.

El proceso de interiorización ha sido objeto de serias reflexiones en el campo de la educación matemática. Surgen preguntas o mejor, líneas de investigación, que indagan sobre las formas como la presencia de un medio digital afecta el aprendizaje de la geometría, del álgebra o del cálculo. Si las imágenes que se producen sobre la pantalla son estáticas no se habrágan ado mucho al pasar del papel a lapantalla, excepto posiblemente precisión; pero si las imágenes sondinámicas, si hay movimiento y simultáneamente preservación de las cualidades estructurales de las figuras, entonces estaremos ante un medio que abre posibilidades integradoras que estaban ausentes. Demos un ejemplo: podemos observar sobre la pantalla que el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo siempre están sobre la misma recta, sin importar cómo modifiquemos la forma original del triángulo.



Allí el estudiante puede hallar el sentido a expresiones como "en todo triángulo el baricentro, el ortocentro y el circuncentro, siempre están sobre una misma línea recta". Los estudiantes, en cierto momento, se convencen de la veracidad de la afirmación cuando intentan transformar el triángulo para encontrar otro que no cumpla la afirmación sobre la colinealidad de los centros, y llegan a la conclusión que no es posible. No es, desde luego, una demostración formal, en el sentido clásico del término demostración, pero es una experiencia que genera certidumbre y sentido a un enunciado matemático. A nivel escolar esto suele ser más importante. A partir de allí se puede elaborar, cuando es pertinente, un siguiente paso en busca de mayor legitimidad. Aquí hay un territorio de exploración muy amplia para la didáctica de las matemáticas. ¿Por ejemplo, en qué medida es necesaria una demostración formal, clásica? Son estas algunas de las posibilidades que un medio digital dinámico pone al alcance del proceso educativo introduciendo una tensión creativa entre el razonamiento formal y la intuición

La mediación de un instrumento tiene dos momentos centrales: primero, cuando la persona explora con el instrumento y segundo, cuando la persona explora a través del instrumento. Alcanzar este segundo nivel es lo deseable pues se refiere al hecho que el instrumento está tan instalado en el sistema cognitivo, que ya no se ve como tal, como instrumento, sino como parte sustancial de los recursos cognitivos de la persona como si siempre hubiese estado allí. Eso es lo que se observa cuando una persona tiene tanta destreza con el manejo de un teclado que parece que hubiese nacido con esa destreza. Entonces, ya no se encuentra ninguna resistencia y la escritura fluye.

Antes aspirábamos a ser el hombre--tigre o el hombre águila; hoy no tenemos que renovar esas aspiraciones: ya somos híbridos, pero ahora fusionados con la escritura y con los medios digitales. Si nuestra vista es débil podemos suplir esta deficiencia con unos buenos lentes casi interiorizados (orgánicamente) a nuestro cuerpo. En general usamos el término interiorización en un sentido metafórico, pero, si hablamos del organismo biológico, su significado deja de serlo como ilustran las reparaciones de partes de la estructura ósea del organismo mediante prótesis de titanio y un sinfín de otros procedimientos.

5. LA SUSTANCIA SIMBÓLICA DE LOS ENTES MATEMÁTICOS

Cuando René Magritte pintó el célebre cuadro La traición de las Imágenes, dejó escrito un mensaje en la parte inferior del cuadro: esto no es una pipa. En efecto, no es una pipa pues con ella no se puede fumar. Es tan solo una representación de la pipa que tal vez Magritte tenía en su bolsillo Si Leopoldo, el hermano de Magritte, hubiese sido matemático, aquella noche habría entrado furtivamente al estudio de pintor y, a la mañana siguiente, tendría listo el cuadro preparado durante la noche. Este

tendría una leyenda en la parte inferior: esto no es un triángulo. En efecto no es un triángulo, pero esta vez no habría, a diferencia del caso de la pipa, ningún triángulo en el bolsillo. Digámoslo de una manera ligeramente distinta: los entes matemáticos, como los triángulos, poseen una forma de existencia que difiere mucho de la que tienen los objetos materiales. Uno puede tener al mismo tiempo una pipa en una mano, y un dibujo de esa misma pipa en la otra mano, es decir, el objeto y una representación del objeto simultáneamente. Ahora bien, ¿qué ocurre con los entes matemáticos?
.

No podemos dejar de ver las formas de los objetos que entran en contacto con nuestra vista. Las representaciones simbólicas de la aritmética y de la geometría tienen, sus orígenes en experiencias de observación y acción tanto en el mundo natural como en el mundo social. Las representaciones matemáticas son entonces portadoras de esas experiencias que constituyen sus significados primarios. Esas primeras representaciones son, como ya lo hemos dicho, re-descripciones representacionales de aquellas experiencias. Podemos reconocer en las representaciones simbólicas, en las maneras como las operamos, las situaciones originales que les dieron vida, Pero el mundo simbólico va ganando gradualmente una autonomía, como los personajes de una novela y es así, en ese nivel simbólico, casi autónomo, donde entramos en contacto con ellos en la escuela. Esa es pues una fuente de dificultades para el aprendizaje.

Llevemos esto a un evento imaginario (¡no tan imaginario!) en el salón de clases. El profesor de geometría empieza a explicar que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a ciento ochenta grados. Dibuja cuidadosamente un triángulo en el pizarrón pero antes de seguir con su "explicación" uno de sus estudiantes, Leonardo, se acerca al pizarrón y con un medidor de ángulos va midiendo uno a uno y suma lo resultados de sus mediciones: ciento ochenta grados. Entonces el profesor exclama: "has comprobado experimentalmente que ese triángulo que está dibujado en el pizarrón tiene una suma de ángulos que, como lo has hecho con mucho cuidado, podemos aceptar es de ciento ochenta grados". "Pero Leonardo", continúa el profesor, ¿"acaso no tienes claro que hay una infinidad de triángulos y que no te alcanzaría la vida para ir de uno al otro verificando que la suma es de ciento ochenta grados?"

El joven Leonardo se queda sorprendido:

¿Cómo sabe el profesor que hay una infinidad de triángulos?

¿Dónde los ha visto y como ha hecho para contarlos; acaso conoce de alguno que no tenga los famosos ciento ochenta grados?

En 1972 René Thom, uno de los grandes pensadores del sigloXX, explicó en una conferencia que "el problema de la comprensión de las matemáticas no es el problema del rigor. Se trata de entender cómo existen los entes matemáticos y qué significan". Por ejemplo, qué significan para el Leonardo de nuestra historia, ese estudiante a quien le habla su profesor de las propiedades de objetos queno puede tocar. Ni él ni su profesor. Sin embargo, cuando el profesor dibuja uno en el pizarrón y parece que se hace la luz, el profesor agrega que ese dibujo no es el objeto correspondiente. Entonces, el estudiante se pregunta por el significado de aquello que está en el pizarrón, pero que no es lo que él creía que era. No es difícil pues estar de acuerdo con Thom: el problema reside en saber de qué objetos se habla, de qué están hechos y cómo puede uno reconocerlos. Si no se entiende esto, ¿cómo seguir adelante?

Si bien la idea de triángulo puede nacer de la experiencia de ver esa forma en un objeto material y luego reconocerla en otros objetos semejantes, el triángulo matemático es un desprendimiento de esas formas triangulares que podemos ver encajadas en objetos materiales. Como ese desprendimiento ya no es material, lo hay que capturarlo mediante otro medio: en este caso, el medio es simbólico. Podría decirse que la existencia simbólica es la continuación de la existencia material.

Los personajes de una novela están construidos mediante el lenguaje, mediante una técnica narrativa y muchas veces están armados con rasgos de personas que el autor conoce. El personaje es como la piel simbólica de personas conocidas, análogo al caso de la forma de existencia de los objetos matemáticos. En el caso de los objetos matemáticos la representación simbólica trae aparejada una manera de operar el objeto matemático y tener como resultado otro objeto matemático.

Si estamos en un lugar remoto y de pronto vemos ondear la bandera de nuestro país, es muy probable que nos emocionemos. Habremos identificado la bandera con el país; ese es la función de un símbolo: tomar el lugar de otra cosa para representarlo.

Si se nos pregunta en una clase “resuelva la ecuación: $2x–1=5$” habría que entender la x como un número escondido y para encontrarlo, hay que realizar unas operaciones aritméticas como las que normalmente se hacen entre números. Esa x representa un número que todavía no sabemos cuál es. Por eso un símbolo también lo podemos ver como una manera de representar la generalidad. Así es en matemáticas. Si queremos decir algo sobre los triángulos, por ejemplo, que la suma de sus ángulos siempre equivale a ciento ochenta grados, dibujamos un triángulo pero ahora lo vemos, no como un triángulo en particular sino como esa sustancia simbólica que representa a todos. Es lo que hay que entender cuando se dice que el lenguaje de las matemáticas es un lenguaje de generalidad, de la abstracción.

6. GEOMETRÍA Y MEDIACIÓN DIGITAL

El acceso a los objetos matemáticos solo es posible mediante una representación simbólica del objeto. Sin embargo, un objeto puede tener más de una representación, como es el caso de las funciones que pueden representarse mediante una fórmula algebraica (en algunos casos) o mediante su gráfica o su representación tabular, para citar algunas posibilidades. Después de la creación de la geometría analítica los modos de representación aumentaron y con el advenimiento del cálculo, todavía más. Por lo tanto, se puede concluir que ninguna representación en particular, captura totalmente al objeto representado. Cada representación enfatiza o ilumina un aspecto del objeto, pero no logra “fotografiarlo” en su totalidad. De allí que es muy posible que el problema central de falta de entendimiento por parte de los estudiantes radique en las dificultades para decodificar lo que una representación exprese del objeto matemático y además que, si bien el estudiante ha tenido éxito con una representación, ese conocimiento que logra de esta manera es parcial y muy probablemente cuando un nuevo problema demande el recurso a otro sistema de representación ese estudiante se encuentre en territorio desconocido.

En el caso de la geometría, usualmente se trabaja con representaciones analíticas (geometría analítica) y representaciones euclidianas. Las posibilidades digitales han enriquecido estas opciones y hoy día se cuenta con sistemas como el Geogebra y muchos otros que permiten una representación dinámica de los objetos geométricos incorporando con los movimientos posibles de los objetos, opciones de exploración y rediseño de estrategias de resolución de problemas.

A continuación presentamos algunos pasajes del trabajo que se ha realizado con profesores en servicio dentro de un programa de desarrollo profesional docente en CINVESTAV, en el Departamento de Matemática Educativa. Los temas versan sobre geometría. En este terreno es posible, y así lo hemos hecho, cambiar la base de conocimientos para abordar problemas que usualmente se abordan mediante la geometría analítica pero ahora desde una perspectiva sintética (euclidiana).

Vamos iniciar la narrativa del trabajo con los profesores con el siguiente problema:

Dado un ángulo y un punto fijo P en el interior del ángulo, trazar el segmento que conecta los lados del ángulo de manera que el punto fijo sea el punto medio del segmento trazado.

El primer acercamiento que siguieron los profesores---estudiantes fue el siguiente: Se elige un punto R sobre la semi---recta BC y por ese punto se traza una semi---recta RP. El punto Q es el punto de intersección de la semi--recta RP con el lado BA del ángulo.

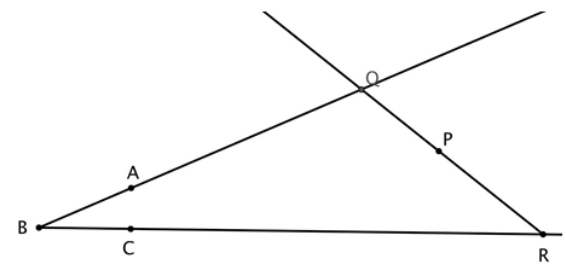


Figura 1

Entonces, desplazando el punto R sobre BC, trataron de estimar visualmente una posición de Q de suerte que RP=PQ. Este acercamiento generó controversia en el salón de clases pues no era posible garantizar "al ojo" la igualdad de las longitudes de RP y PQ. El siguiente paso fue medirlas y de nuevo, desplazar el punto R hasta que se encontrara una posición de Q de modo que RP fuese igual a PQ.

En este momento se sugirió a los profesores que el acercamiento seguido si bien arrojaba una respuesta al problema propuesto, en realidad estaba sujeto aún a controversia pues alguien podría argumentar que las longitudes coincidían hasta el segundo decimal (el medio digital estaba preparado para que así fuese) pero que no estaba uno seguro qué ocurriría con los decimales restantes.

La discusión se orientó entonces a esclarecer qué constituía una demostración, y se llegó a que debería ser un argumento suficientemente convincente para que aún los más escépticos quedaran satisfechos. Los profesores con mayor experiencia sostuvieron que en todo caso, un argumento con tales características dependería del nivel de conocimientos de aquellos a quienes se les presentara dicha evidencia. Es decir, se agregó una segunda característica a la noción de demostración: una demostración es un argumento convincente de acuerdo al nivel de conocimientos que tenga el estudiante. Entonces se planteó que como la argumentación basada en la medición de las longitudes arrojaba dudas, ¿qué otro argumento podríamos producir?

A lo largo de la sesión un grupo llegó a la conclusión que en lugar de medirlos segmentos RP y PQ, podría intentarse a partir de un circulo de radio RP desplazar R sobre su semi---recta hasta que el circulo tocara al punto Q. En ese momento, RP sería igual a PQ (Fig. 2).

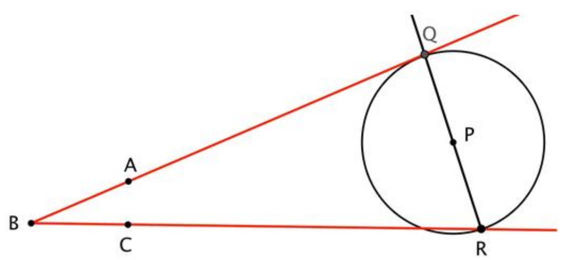


Figura 2

La solución convenció a muchos más, pero todavía había varios escépticos. Se aprovechó entonces para formular algunos comentarios sobre el "argumento que convence" porque ¿qué significa "tocar" en la solución propuesta?

Hay argumentos que lo convencen a uno mismo, luego hay otros que convencen a los amigos y los más sólidos, son aquellos que convencen a los "enemigos". Estábamos en la situación siguiente: se habían producido argumentos para convencer a los amigos, pero no a los "enemigos", quienes permanecían escépticos. La solución siguiente fue un resultado colectivo con la guía de los orientadores del curso. Se toma el punto simétrico de R sobre la semi-recta RP, aunque no toque a la semi-recta BA. Y luego, se desplaza el punto R y se observa que el punto simétrico R' traza una recta paralela a la semi---recta BC. (Fig. 3)

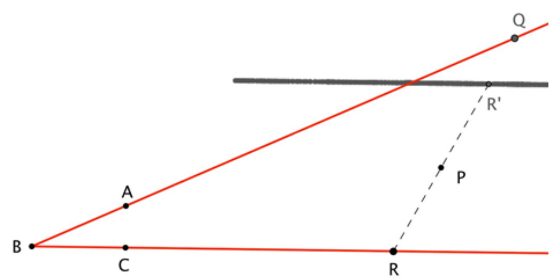


Figura 3

Aunque no es visible en esta imagen, el punto Q seguía conectado con R mediante la semi---recta RP de modo que al desplazar R, R' trazaba la línea (gruesa en Fig.3) paralela a BC, el punto Q se desplazaba sobre BA yjustamente coincidía con R' cuando la paralela trazada por R' intersectaba a BA. Allí estaba la localización del punto que se buscaba pues en todo momento RP era igual a PR' por construcción.

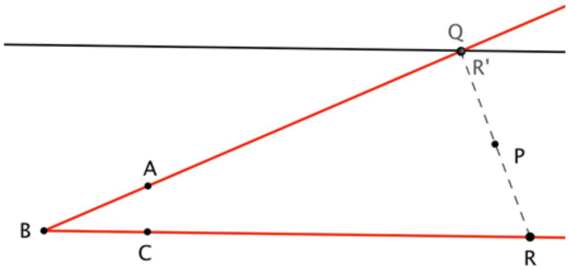


Figura 4: Q y R' coinciden

La conclusión delos profesores fue interesante: ya no quedan "enemigos". Hay varias lecciones que pueden extraerse de esta primera experiencia. Una de ella es que las posibilidades de manipulación que ofrece el medio digital genera una sensación e materialidad de los objetos matemáticos que ya no son tan remotos para los estudiantes y que por lo tanto, estimulan el interés por su exploración.