APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESDE LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE PROGRAMAS TECNOLÓGICOS

Víctor Manuel Uribe Villegas
Cód.: 0903540

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2018

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESDE LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE PROGRAMAS TECNOLÓGICOS

Línea de investigación
Tecnologías de la Información y de la Comunicación y Educación Matemática
TICEM

Víctor Manuel Uribe Villegas
Cód. 0903540

Informe final del Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en Educación:
Énfasis Educación Matemática

Dr. David Benítez Mojica
Tutor

Mg. Maritza Pedreros Puente
Cotutora

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2018

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
AREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FECHA DE LA SUSTENTACIÓN: Santiago de Cali 31 de Agosto de 2018

ESTUDIANTE: VICTOR MANUEL URIBE VILLEGAS - CÓDIGO: 0903540

TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:

"APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESDE LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE PROGRAMAS TECNOLÓGICOS

DIRECTOR DE TESIS: *Profesor DAVID BENITEZ MOJICA (Tutor)*
Profesora MARITZA PEDREROS PUENTE (Cotutora)

EVALUADORES: *Profesor JOSÉ HERMAN MUÑOZ ÑUNGO*
Profesor JORGE LUIS RODRÍGUEZ CONTRERAS

COMENTARIOS DE LOS JURADOS - Destacan la pertinencia,, se requiere trabajar el texto para su publicación!

APROBADO X
APLAZADO
RECHAZADO

Prof. SANTIAGO ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. DAVID BENITEZ MOJICA
Director de Tesis

Maritza Pedreros P.
Prof. MARITZA PEDREROS PUENTE
Cotutora

Prof. JOSÉ HERMAN MUÑOZ ÑUNGO
Jurado Evaluador

Prof. JORGE LUIS RODRÍGUEZ C.
Jurado Evaluador

DIEGO GARZON CASTRO.
Prof. DIEGO GARZON CASTRO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)

Santiago de Cali, septiembre de 2018
ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

DEDICATORIA

A mi mis padres (Q.E.P.D.)…
por mi vida y por sus años de dedicación,
quienes me enseñaron la humildad, el trabajo y el amor.

A mi hermano Juan Carlos Uribe (Q.E.P.D)…
cuya vida fue el mejor ejemplo de estudiosidad.

A mi esposa…
quien con su amor, dedicación y motivación
guió las primeras pinceladas de esta empresa llamada maestría.

Y a mis hijos Juan José y Juan Felipe...
quienes son y serán por siempre los motores de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A la Institución Universitaria Antonio José Camacho…
por motivar y apoyar a sus funcionarios a seguir
en el infinito camino de la formación y superación académica.

Al Dr. David Benítez, tutor…
por alentar este proceso sin cansancio,
por tener siempre el espacio y el tiempo oportuno,
y por sugerir los mejores contextos.

Al Dr. Diego Garzón y al Mg. Octavio Pabón (Q.E.P.D)…
por dirigir con maestría aquel diplomado en
Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación,
donde inició todo este proceso.

A mis demás maestros…
a quienes no nombraré por no omitir a ninguno,
por sus tiempos y enseñanzas.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

En este informe final de investigación se hace referencia al aprendizaje del concepto de función desde el enfoque de resolución de problemas y desde la mediación instrumental en estudiantes de primer semestre de programas tecnológicos de la facultad de ingenierías de la Institución Universitaria Antonio José Camacho.

En esta perspectiva, interesa concebir, diseñar, poner en escena y evaluar una propuesta de aula que toma en consideración aspectos de la resolución de problemas como el sistema de creencias, los contextos en los que se presentan dichos problemas y la articulación de múltiples registros semióticos del concepto de función.

Para ello, se ha optado por un diseño pre-experimental conformado por cinco fases que se estructura de la siguiente manera. Fase I, se aplica una prueba diagnóstica para caracterizar el estado actual de los estudiantes antes de la intervención en el aula. Fase II, se realiza una capacitación en el uso e implementación del GeoGebra. Fase III, se realiza el diseño y la implementación de tres instrumentos de medición entre la enseñanza y aprendizaje del concepto de función basado en el enfoque de resolución de problemas y la mediación instrumental. Fase IV, se realiza una prueba final después de la intervención en el aula; y fase V, se realiza una encuesta valorativa en donde los estudiantes evalúan la metodología implementada.

Entre los resultados que se destacan en la investigación, se observa como el sistema de creencias de los estudiantes, alrededor del concepto de función, impacta notablemente la manera cómo van a resolver problemas y como los estudiantes se resisten a transformar las de creencias erróneas a pesar de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la fase III de implementación.

De igual manera se destaca como la incorporación de TIC y, particularmente, la construcción, exploración y la acción del estudiante sobre de representaciones dinámicas transforman significativamente el concepto de función que tiene los estudiantes.

Descriptores:

Situación problema, registro semiótico, creencias, concepto de función, Software de matemáticas dinámicas.

INTRODUCCIÓN

El concepto de función ha sido, sigue y seguirá siendo objeto de estudio y de reflexión en diferentes procesos de investigación en didáctica de las matemáticas. Si bien es cierto que se han desarrollado múltiples investigaciones alrededor de este, la comprensión del mismo en los estudiantes que llegan a la formación universitaria sigue siendo deficiente.

Este trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación, énfasis Educación Matemática, afronta un problema donde interesa un diseño de aula que, por un lado, articule una propuesta desde la resolución de problemas para conceptualizar el concepto de función y, por otro lado, que aborde la mediación instrumental en el estudio de distintos registros semióticos del concepto de función en un ambiente de matemáticas dinámicas como lo es el GeoGebra.

Para este trabajo se opta por un enfoque metodológico próximo a un preexperimento en el que se realiza una prueba diagnóstica para mirar el estado de los estudiantes, se les capacita en el uso básico del ambiente de matemáticas dinámicas y se implementan tres actividades de trabajo con el fin abordar el concepto de función desde tres situaciones problemas en diferentes contextos matemáticos para, finalmente, realizar una prueba de salida dirigida a analizar el estado final después de las actividades implementadas.

Para ofrecer al lector un panorama general acerca del contenido del documento, se describen, a continuación, cada uno de los cinco capítulos que lo componen.

En el primer capítulo se define el problema a partir de los objetivos y las preguntas de investigación, las cuales se presentan al finalizar el capítulo como producto de diferentes antecedentes, tanto en el ámbito nacional como internacional y de múltiples justificaciones que surgen de una mirada a las políticas nacionales de educación, a aspectos curriculares y observando algunos resultados de pruebas estandarizadas a nivel internacional. Tanto los objetivos y las preguntas de investigación se constituyen en el eje rector de las acciones emprendidas en la metodología de la investigación.

En el segundo capítulo se centra la reflexión en los referentes teóricos que sustentan el problema de investigación. Desde una dimensión histórico-epistemológica se analiza la evolución del concepto de función y sus aportes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; desde una dimensión didáctica se presenta el enfoque de resolución de problemas revisando los trabajos de Polya, Schoenfel y Santos; se realiza el estudio de los registros de representación semiótica desde Duval y, finalmente, se hace una revisión a la mediación instrumental.

En el capítulo tres se presenta la metodología de investigación que comprende 5 fases: fase I aplicación de la prueba diagnóstica; fase II capacitación básica en el uso del GeoGebra; fase III implementación de tres hojas de trabajo; fase IV prueba final para medir el impacto de la implementación, y fase V encuesta valorativa por parte de los estudiantes. De cada una de estas fases se presenta su proceso de diseño, pilotaje y rediseño. Asimismo, se describen las condiciones de aplicación y la metodología de trabajo implementada en el aula.

Por su parte, en el capítulo cuatro se analiza la información obtenida en cada una de las fases y los instrumentos aplicados. Este estudio se hace desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativamente, por lo que se emplean tablas y gráficas para presentar la información, así como algunas evidencias que consisten en escaneos de manuscritos de los estudiantes. Al final del capítulo se hace un análisis comparativo de los resultados del diagnóstico y la encuesta de salida con la finalidad de evaluar el impacto de las actividades aplicadas en el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, en el capítulo cinco se dan las respuestas a las preguntas de investigación planteadas al inicio del presente trabajo. De estas respuestas se derivan algunas sugerencias, tanto para la enseñanza como para investigaciones posteriores.

A manera de anexos se presentan los instrumentos aplicados y aquellas evidencias citadas previamente en la realización de los análisis y que respaldan la metodología implementada.

De manera general, este trabajo de investigación pretende reivindicar la resolución de problemas y la incorporación de TIC como metodología de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO I: PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

En este primer capítulo se presenta el problema de investigación haciendo alusión a las dificultades que genera la comprensión del concepto de función en la iniciación al estudio del cálculo y, en general, en la formación del pensamiento matemático en el contexto universitario. De igual manera se presentan los interrogantes que surgen desde la resolución de problemas, cuando se incorporan TIC como mediadores del aprendizaje del concepto de función.

1.2. Contextualización

El concepto de función se ha constituido en pilar de la formación universitaria y, a la vez, ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones en la educación matemática, ya que de la comprensión del mismo depende la iniciación al estudio del cálculo y, en general, el desarrollo del pensamiento matemático.

Entre las investigaciones que se destacan alrededor del concepto de función aparecen Dubinsky, E. & Harel, G. (1992), Sierpinska (1992), Ruiz (1998), Díaz, J. L. (2008), Sastre, Rey y Boubee (2008), Carvajal, Y. & Vega, Y. (2014), Trujillo, Castro, Delgado (2010) en las cuales se documentan diferentes dificultades en la comprensión de dicho objeto matemático.

De acuerdo a Artigue, M. (1995), la comprensión del concepto de función es una de las dificultades asociadas con el aprendizaje del cálculo y estas distan de ser solucionadas cuando comienza la enseñanza de esta asignatura. Dificultades en cuanto al concepto propio de función, en cuanto a la flexibilidad proceso-concepto, dificultades entre las articulaciones de los registros semióticos, y dificultades en el status de herramienta y los cambios de cuadros[1] son las que se han documentado en múltiples investigaciones.

En Colombia, el estudio formal del concepto de función inicia en el grado noveno de la educación media a través de un acercamiento al concepto como correspondencia entre

[1] Cuando Artigue hace a cambios de cuadros hace referencia a lo numérico, lo geométrico o contextos externos a las matemáticas.

conjuntos y como conjuntos de pares ordenados; se estudian las diferentes representaciones y las articulaciones que existen entre ellas; de igual manera se estudian las propiedades de las funciones y su clasificación; se profundiza en el estudio de las funciones polinómicas como la lineal y la cuadrática; y se trabajan las funciones exponenciales y logarítmicas (MEN, 2006). A partir de grado décimo y undécimo se trabajan las funciones de variación periódica como las trigonométricas y se profundiza el estudio de sus derivadas.

De esta manera, un estudiante graduado de la educación media que llega a primer semestre de cualquier programa universitario debería tener un dominio básico del concepto de función, sin embargo, muchas instituciones de educación superior se ven obligadas a incluir dentro del primer semestre asignaturas que retoman el estudio de este concepto como eje central de esa fundamentación matemática. Es aquí donde surge una primera pregunta ¿Por qué los estudiantes que ingresan a la universidad presentan falencias en el dominio de dicho concepto si ya lo han estudiado, por lo menos, durante tres años de su formación escolar?

Ahora bien, algunas investigaciones han mostrado que los errores y las incomprensiones de los estudiantes son difíciles de superar, en parte, por las prácticas de enseñanza centradas en la exposición magistral de un saber matemático ya acabado que no permite ninguna discusión por parte de los estudiantes (axiomas, teoremas, y aplicaciones) y por las formas como el estudiante accede al conocimiento (Trujillo et al., 2010). De acuerdo a lo anterior podríamos preguntarnos ¿cómo se caracterizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de función en el contexto de la educación superior?

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) ha planteado cinco procesos generales de la actividad matemática que recogen los conocimientos conceptuales y conocimientos procedimentales propios del quehacer matemático. Entre estos procesos aparece *la formulación, tratamiento y resolución de problemas* y *la modelación*, los cuales no son excluyentes entre ellos, ya que pueden darse de manera simultánea, ejemplo de ello es la resolución de problemas que puede involucrar la modelación. En cuanto a la resolución de problemas, Santos (1993) manifiesta que la caracterización de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en términos de la resolución de problemas cuestiona la matemática como un conjunto de hechos, algoritmos y procedimientos que el estudiante debe aprender de memoria. Dicho en términos de Benítez, D. (2017) “el enfoque de la resolución de problemas ve a la matemática como un objeto de aprendizaje, en el cual los estudiantes se desenvuelven en un ambiente similar al de los matemáticos profesionales”.

Y en cuanto la modelación, se entiende como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente (MEN, 2006), lo que le permite al estudiante llevar una situación de la vida real al lenguaje matemático para estudiarla, medirla, controlarla e inferir lo que ocurrirá en la realidad. Durante todo este proceso aparece el estudio de las funciones matemáticas definidas por el estudio de las relaciones entre cantidades que varían unas en dependencia de otras.

Ahora bien, desde la perspectiva de Duval (1995) no hay un conocimiento que se pueda movilizar sin una actividad de representación, en este sentido, se accede al aprendizaje del concepto de función a través de sus registros de representación. El concepto de función es rico en registros de representación como el verbal, tabular, gráfico y algebraico y, en este sentido, acceder a este objeto matemático es reproducir sus representaciones semióticas. Es aquí donde las TIC surgen como herramienta mediadora para la enseñanza del concepto de función ya que posibilita la visualización de los diferentes registros semióticos que intervienen en su estudio. Uno de los aspectos centrales de la incorporación de TIC es que propicia el uso e implementación de tareas que permiten el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas tomando distancia de las prácticas centradas solo en la exposición del maestro.

Las TIC abren la posibilidad de estudiar un objeto o problema matemático desde distintos puntos de vista y representaciones de manera articulada, permitiendo establecer nuevas relaciones entre las representaciones en juego y a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos bajo estudio. Moreno (1999) afirma que:

> Los instrumentos informáticos (calculadoras, computadores, etc.) tienen una característica que distingue a sus sistemas de representación de los sistemas escritos, a saber: la posibilidad de procesar las representaciones. En cierto sentido, esta capacidad de procesamiento de los sistemas de representaciones equivale a una externalización de una función cognitiva… y, por otro lado, toda actividad cognitiva es una actividad mediada por instrumentos.

En resumen, la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en el contexto universitario, desde la mediación instrumental y la resolución de problemas, se han constituido en temas de interés de la comunidad educativa a nivel nacional e internacional y es el tema central de este trabajo.

1.3. Antecedentes

La incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha constituido en un tema de investigación y de documentación a nivel nacional e internacional. Reflejo de esto son los diferentes foros, congresos, conferencias y encuentros especializados que se realizan, donde la temática de la incorporación de las tecnologías en la educación matemática es tema central de algún grupo de trabajo o tema central del evento mismo. De igual manera, los trabajos que hacen referencia a la resolución de problemas como vía natural del aprendizaje de las matemáticas y la modelación como competencia obligada a desarrollar en el pensamiento matemático sobresalen en eventos académicos. A continuación se presentan los antecedentes de investigación, curriculares y legales, tanto internacionales como nacionales, que sirven como punto de partida para la presente investigación.

1.3.1. *De Investigación*

En cuanto al concepto de función, uno de los trabajos que ya se mencionó en la contextualización y que sobresale en el plano investigativo es el trabajo de Sierpinska (1992), en este se presenta un listado de los obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función con sus respectivos actos de comprensión. Los obstáculos de origen epistemológicos son los que están ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él (Trujillo et al., 2010). Sierpinska (1992) hace referencia a estos obstáculos tomando como referencia distintos aspectos: obstáculos en relación a que es lo que cambia en una función, obstáculos en relación a las cantidades conocidas y desconocidas; obstáculos en relación a las variables independientes y dependientes; obstáculos en relación a las magnitudes y los conjuntos numéricos; obstáculos en relación a expresión algebraica de la función, y obstáculos en relación al concepto propio de función, entre otros.

En el ámbito nacional, el libro de Trujillo et al. (2010), *El concepto de función y la teoría de situaciones*, se consolidan dos investigaciones de la Universidad de La Salle: la primera determina el impacto de incorporación de las calculadoras graficadoras como instrumento mediador en el aprendizaje del concepto de función y la segunda investigación hace referencia a la mediación de situaciones didácticas en la superación de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto de función.

Ahora bien, en el contexto internacional los trabajos relacionados con la mediación instrumental del profesor Luis Moreno Armella son de interés para este trabajo porque en estos analizan las tecnologías digitales como herramientas mediadoras entre la percepción y el aprendizaje del conocimiento matemático. Particularmente se destaca el trabajo titulado "Tecnología Digital y Cognición Matemática: Retos Para la Educación" de Sandoval, I. y Moreno, L. (2012) ya que muestra como las representaciones dinámicas permiten construir objetos matemáticos cargados de significado.

En el ámbito nacional y en cuanto a la incorporación de TIC, sobresale el Ministerio de Educación Nacional que ha venido generando reflexiones, aproximadamente desde 1999, en torno a la incorporación de tecnologías en la educación matemática y ha publicado una serie de lineamientos y textos a seguir en los procesos de uso de la tecnología. Una muestra de este trabajo es el proyecto de Incorporación de Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia, Ministerio de Educación Nacional (2001) y el proyecto de Redes de Aprendizaje, auspiciado por Colciencias en el 2007. El primer proyecto se planteó como estrategia para mejorar la calidad de la educación, propiciar la modernización de los ambientes escolares en Colombia y promover el uso de la tecnología en la educación a nivel nacional. El segundo proyecto promovió una red de aprendizaje desde la didáctica de las matemáticas con grupos de trabajo en el departamento de Antioquia y del Valle del Cauca. Estos proyectos son un reflejo de que en el país se ha venido gestando un interés por las tecnologías y su impacto en la educación, específicamente, en la educación matemática.

1.3.2. *Eventos internacionales*

Diferentes eventos internacionales ponen en evidencia el interés por la mediación instrumental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se hace referencia a dos de ellos, el CERME 10 en el contexto europeo y el CIAEM en el ámbito latinoamericano.

1.3.2.1. *Internacionales CERME 10*

En el décimo Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME 10)[2] se conformaron diversos grupos de trabajo alrededor de diferentes líneas relacionadas con la propuesta de investigación del presente proyecto. Dentro de estos grupos de trabajo se destaca los siguientes:

- Grupo de trabajo 6 denominado *Applications and Modelling*. El objetivo del grupo de trabajo fue el de proporcionar un espacio para la presentación y el intercambio de investigaciones, experiencias, materiales e ideas relacionadas con la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los modelos matemáticos y aplicaciones en los niveles de primaria, secundaria, terciaria y la formación del profesorado.
- Grupo de trabajo 14 denominado *University Mathematics Education.* Se centró en la línea la investigación sobre la educación matemática en la educación superior y entre sus líneas de interés aparece una relacionada con el estudio de los problemas que se presentan en la transición a la matemática universitaria.

[2] CERME 10. Se Realizó en Irlanda en la Universidad de Dublin. Entre el 1 y 5 de febrero del 2017. http://www. http://cerme10.org/

- Grupo de trabajo 15 "*Teaching Mathematics with Technology and Other Resources"* y grupo de trabajo 16 "*Learning Mathematics with Technology and Other Resources".* El objetivo de estos dos grupos fue adoptar una visión amplia de los recursos de información y la comunicación (TIC) en la educación matemática para incluir software, dispositivos de mano, actividades en línea, etc. Dentro de la concepción de TIC, los grupos incluyen las reflexiones alrededor de las herramientas tradicionales como recursos manipulativos y libros de texto. El ámbito del grupo de trabajo 15 fue abordar cuestiones explícitas relacionadas con los recursos y la tecnología que más conciernen a los docentes, mientras que el grupo de trabajo 16 trató estas cuestiones desde las perspectivas de los estudiantes.
- Grupo de trabajo 24 "*Representations in Mathematics Teaching and Learning".* Este grupo se dedicó a la representación. En este se conciben las representaciones como una parte integrante del quehacer de las matemáticas y, por lo tanto, una parte importante de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En general, en este evento se evidencia la importancia y el impacto que tienen las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el estudio de la modelación, el estudio de las representaciones de los objetos matemáticos, las reflexiones alrededor de la educación matemática en el contexto universitario y se muestra, en cierta medida, el interés académico que despierta el diseño de actividades que las incorporan.

1.3.2.2. *Latinoamericanas CIAEM*

En el año 2015 se realizó el XIV Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM, en la ciudad de Chiapas, México. En este evento, al igual que el CERME, se conformaron grupos de trabajo relacionados con la problemática propuesta en este trabajo como los siguientes:

- Grupo de trabajo 4. Uso de tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
- Grupo de trabajo 13. Álgebra y funciones en Educación Matemática.
- Grupo de trabajo 21. Resolución de problemas.

- Grupo de trabajo 22. Modelización en Educación Matemática.

Además de profundizar en cada una de las temáticas, el objetivo general del evento fue reflexionar en los retos futuros de la educación matemática.

1.3.3. *Curriculares y Legales*

En cuanto a la educación media, es el Ministerio de Educación Nacional quien a través de los Estándares Básicos de Competencias y los Lineamientos Curriculares determina el currículo de matemáticas. La estructura de dicho currículo está determinada por cinco pensamientos matemáticos, los cuales se relacionan entre sí permitiendo una relación entre los contenidos. Es el pensamiento variacional que juega un papel fundamental en el desarrollo del concepto de función y, particularmente, es en grado noveno que se inicia el estudio formal de dicho concepto.

En cuanto a la educación universitaria, que es el interés de esta investigación, existe autonomía establecida en la Constitución Política de Colombia en el Art. 69 que dice "Se garantiza la autonomía universitaria. Las universidades podrán darse sus directivas y regirse por sus propios estatutos, de acuerdo con la ley". Esta autonomía universitaria se entiende como la discrecionalidad para desarrollar el contenido académico de acuerdo a las instituciones. La autonomía es connatural a la institución universitaria, pero siempre debe estar regida por criterios de racionalidad que impiden que la universidad se desligue del orden social justo. En este sentido, las universidades tienen la autonomía de proponer y desarrollar el currículo de matemáticas según sus necesidades. No obstante, muchas se apoyan en el primer semestre de su formación en ciencias básicas en tomar como referente el documento de los estándares básicos de competencias para organizar sus cursos de precálculo, matemáticas básicas o matemáticas fundamentales, según la universidad.

1.4. Justificación

La educación matemática se ha constituido en una disciplina medular en la formación universitaria, y al igual que en otros contextos, ya no se discute su contribución a los fines últimos de la educación ni el encargo social que tiene, pues se reconocen sus aportes a la economía, a las ingenierías, a la tecnología, a las ciencias de la salud, a las finanzas, a las ciencias humanas, etc. (MEN (2006). Más bien su discusión se centra en cómo deben ser los procesos de enseñanza y de aprendizaje para que haya un desarrollo propicio del pensamiento matemático en sus estudiantes.

Este interés por estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas surge por diferentes razones, entre ellas: los resultados negativos de los estudiantes en pruebas de matemáticas internacionales; los resultados de investigaciones en las que se muestra una gran brecha entre el conocimiento matemático institucionalmente aceptado por la comunidad académica y el conocimiento que desarrolla e interioriza el estudiante (Trujillo et al., 2010); el desinterés por parte de los alumnos hacia las matemáticas; la baja vinculación de estudiantes a carreras profesionales donde las matemáticas se constituyen en eje medular de la formación; la alta deserción de estudiantes en los primeros semestres universitarios donde las matemáticas se constituyen en el fundamento de la formación básica.

El concepto de función no está ajeno a la problemática planteada en el párrafo anterior. De este concepto depende la iniciación de matemáticas más complejas como el cálculo, el estudio de las ecuaciones diferenciales, la física, entre otras asignaturas. Asimismo, de la comprensión y dominio de este concepto y sus sistemas de representación depende el desarrollo de la modelación que se constituye en uno de los procesos medulares del pensamiento matemático.

Muchas investigaciones han sugerido que el estudio del concepto de función debe considerar sus sistemas de representaciones, es decir, sus registros semióticos. En este sentido se han sugerido estrategias como las de incorporación de TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para propiciar el estudio de las relaciones que existen entre las múltiples representaciones.

Hoy en día, la incorporación de TIC suscita aún muchas interrogantes, pues la mediación que se establece entre las TIC y los objetos matemáticos que se movilizan en las actividades que se diseñan genera situaciones diferentes a las vividas en un aula de clase tradicional.

En consecuencia, caracterizar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función en el contexto universitario, mediado por las TIC, se constituye de vital importancia en la educación matemática.

A continuación, se presenta la justificación del presente trabajo desde diferentes facetas: como respuesta a las políticas nacionales; como actualidad en la vigencia curricular; actualidad en las agendas de investigación; como respuesta a los resultados negativos en las pruebas nacionales e internacionales, y desde la necesidad de responder a las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función.

1.4.1. *Políticas Nacionales*

1.4.1.1. *Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2026*

Entre los desafíos estratégicos que el Plan Nacional Decenal de Educación (PNDE) ha considerado para los años 2016-2026 y que se relacionan con la presente propuesta de investigación se destacan los siguientes:

- Tercer Desafío Estratégico: *El establecimiento de lineamientos curriculares generales, pertinentes y flexibles*.
- Quinto Desafío Estratégico: *Impulsar una educación que transforme el paradigma que ha dominado la educación hasta el momento*.
- Sexto Desafío Estratégico: *Impulsar el uso pertinente, pedagógico y generalizado de las nuevas y diversas tecnologías para apoyar la enseñanza, la construcción de conocimiento, el aprendizaje, la investigación y la innovación, fortaleciendo el desarrollo para la vida.*

La visión del PNDE propende por formar en el colombiano su pensamiento crítico, la creatividad, la curiosidad, los valores y las actitudes éticas, el respeto a la heterogeneidad y diversidad y estimular la activa participación de los jóvenes en la organización política y social. Este objetivo se llevará a cabo a través de unos lineamientos estratégicos entre los que destaca la renovación curricular de la educación preescolar, básica, media y la educación superior respetando la autonomía que le concede la ley a las instituciones educativas en general. Esta renovación implica una profunda reflexión sobre el modelo pedagógico que ha imperado en la educación colombiana y que aún se ve en las aulas de clase, es por ello que hay un gran interés por formar a los maestros en el uso pedagógico de las diversas tecnologías para permitir desarrollar habilidades en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

1.4.2. *Vigencia curricular*

1.4.2.1. *Estándares Básicos de Competencia Matemática*

Como se manifestó con anterioridad, desde el ámbito de la educación media aparece el documento de los estándares básicos de competencia matemática, documento que también se ha constituido en referente de la educación superior, especialmente en los primeros semestres donde se toman los cursos de precálculo o matemáticas básicas o matemáticas I, etc. En estos cursos, las universidades pretenden reforzar la formación del pensamiento matemático alcanzada por los estudiantes.

1.4.2.2. *Formación tecnológica en Colombia*

La educación tecnológica en Colombia se consideró como una modalidad de educación superior, en el marco del decreto 080 de 1980 entre las que también aparecían la formación técnica profesional y la universitaria. Con la ley 30 de 1992, el concepto de modalidad se cambió por el de “campo de acción” apareciendo la técnica, la ciencia, la tecnología, las humanidades, el arte y la filosofía como espacios de acción de la educación universitaria. En esta nueva caracterización, la tecnología afianzó, aún más, la separación curricular e institucional entre la formación técnica y la formación en ingenierías, dejando interrogantes como ¿Qué diferencia un tecnólogo de un técnico y de un ingeniero? ¿Cuáles son las competencias que desarrolla un tecnólogo que difieren de un técnico o de un ingeniero? De acuerdo al MEN (2008), un tecnólogo se caracteriza y difiere de un técnico en que:

> (…) Desarrolla competencias relacionadas con la aplicación y práctica de conocimientos en un conjunto de actividades laborales más complejas y no rutinarias, en la mayor parte de los casos, y desempeñadas en diversos contextos. La teoría cobra más preponderancia y sentido para conceptualizar el objeto tecnológico que le permita visualizar e intervenir en procesos de diseño y mejora. Se logra mayor capacidad de decisión y de evaluación así como de creatividad e innovación. Se requiere un considerable nivel de autonomía y, muchas veces, el control y la orientación de otros. Toda su formación corresponde a prácticas en la gestión de recolección, procesamiento, evaluación y calificación de información para planear, programar y controlar procesos que encuentran en la teoría razones y fundamentos para la innovación y la creatividad.

En este sentido, ¿cuál será el papel de las ciencias básicas y, en particular, de la educación matemática en la formación de un tecnólogo? La formación de tecnólogos en Colombia se ha priorizado como una respuesta a la alta demanda de personal calificado en la aplicación de la ciencia y la tecnología, y a la necesidad de vincular jóvenes a la vida laboral (Gómez, V. 1995). El Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA)[3] entiende que la formación en tecnologías ha de propiciar un personal apto en la comprensión teórica para la formación de pensamientos innovadores e inteligentes y ha de formar estudiantes que tengan la capacidad de diseñar, construir, ejecutar, controlar, transformar y operar en los diferentes mercados y contextos.

1.4.3. *Resultados en pruebas*

1.4.3.1. *Internacionales*

1.4.3.1.1. *Pruebas PISA*

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) es una prueba estandarizada que evalúa cada tres años la calidad de la educación en los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y otras economías invitadas que han sido aceptadas por la junta de gobierno de PISA.

[3] Esta referencia aparece en la página web del Organización Internacional para el trabajo (OIT) http://www.oitcinterfor.org/experiencia/formaci%C3%B3n-t%C3%A9cnicos-profesionales-tecn%C3%B3logos-sena-colombia.

Aunque desde la postura del gobierno se presenta con gran satisfacción la mejoría de la participación de Colombia en los resultados de matemáticas respecto a participaciones anteriores, seguimos estando por debajo de la media mundial ocupando el puesto 57 entre 72 países (Ministerio de Educación Nacional, 2016, Pg. 9). El país que obtuvo la mayor puntuación fue Singapur con un promedio total de 564 puntos, mientras que Colombia obtuvo un puntaje promedio de 390.

Al ver el promedio general de la prueba que fue de 490 puntos, nos damos cuenta que aún seguimos muy atrás respecto a ese promedio general (ver figura 1).

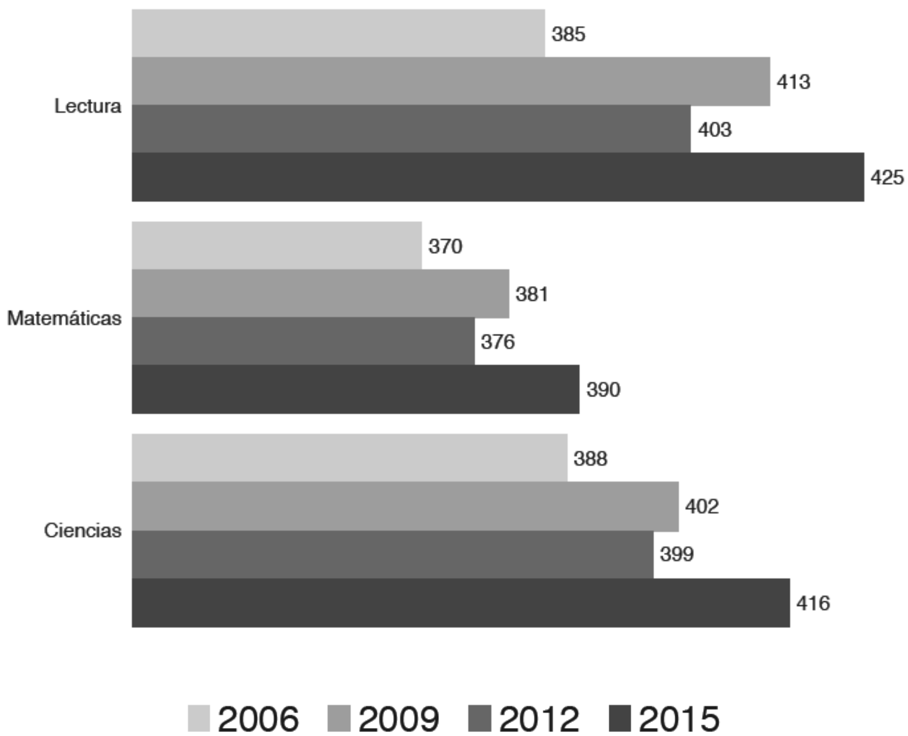


Figura 1: Resultados históricos de Colombia en la prueba PISA
Fuente: MEN (2016) Resumen ejecutivo Colombia en PISA 2015

1.4.3.1.2. *Pruebas TIMSS ultima participación de Colombia (2007)*

Las pruebas TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias TIMSS, por sus siglas en inglés) tienen como objetivo brindar información para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, en particular, para desarrollar competencias relacionadas con la solución de problemas y el razonamiento riguroso y crítico. Esta prueba se ha implementado en estudiantes de cuarto y octavo grado, y se triangula con información recolectada sobre la implementación de los currículos y la identificación de buenas prácticas de enseñanza en las instituciones. Los resultados se presentan en escalas que tienen internacionalmente un promedio de 500 (que se denominó “promedio TIMSS”) y una desviación estándar de 100, a partir de las cuales se hacen las comparaciones entre los países con respecto a ese valor.

El promedio global de los estudiantes colombianos de cuarto grado fue 355 puntos, el cual está muy por debajo de Hong Kong (607), Singapur (599), Taipéi (576) y Japón (568). En ese grado nuestro país superó solamente a Marruecos (341), El Salvador (330), Túnez (327), Kuwait (316), Qatar (296) y Yemen (224). Situación similar se observa en octavo, en donde el promedio global de Colombia fue 380, mientras que los de Taipéi, Corea y Singapur fueron, respectivamente, 598, 597 y 593. En ambos grados nuestro promedio fue significativamente inferior al promedio TIMSS.

1.4.3.2. *Nacionales*

1.4.3.2.1. *Pruebas saber pro 2016*

Las pruebas saber pro hacen parte de un conjunto de pruebas estandarizadas diseñadas e implementadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y el Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación (SNEE). Entre las pruebas que se implementan están las Saber 3°, 5° y 9°, Saber 11, Saber TyT y Saber Pro. La medición de la calidad de la Educación Superior, es decir, del último ciclo educativo se realiza por medio de dos exámenes: Saber Pro y Saber TyT. El primero está diseñado para los programas académicos profesionales y el segundo para los programas académicos técnicos y tecnológicos.

El Razonamiento Cuantitativo hace parte de una de las competencias genéricas que se evalúan y se caracteriza por valorar la comprensión y transformación de la información cuantitativa presentada en distintos formatos; por formular y ejecutar planes para dar solución a problemas que involucran información cuantitativa u objetos matemáticos; y por justificar, argumentar o dar validez a procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas planteados. En total se formulan 30 preguntas de razonamiento cuantitativo.

En el año 2016 se implementó la última prueba Saber Pro y se observó que más de la mitad de los estudiantes evaluados, en la competencia del razonamiento cuantitativo, se encuentran en los dos niveles más bajos de desempeño (ver figura 2).

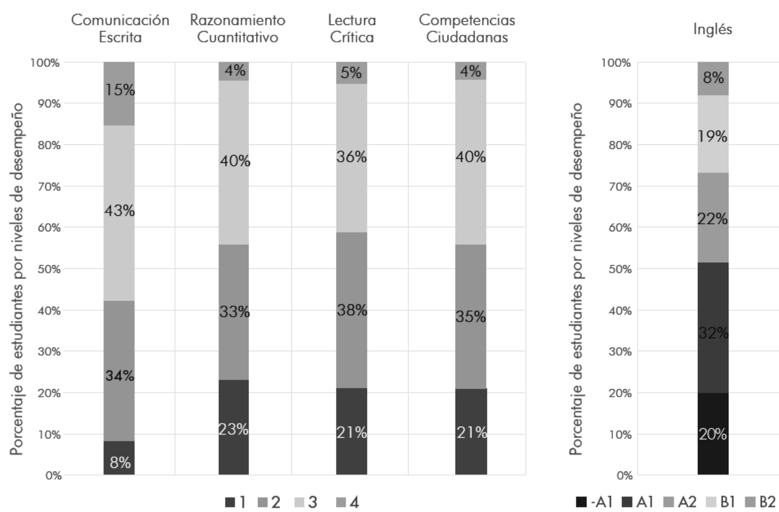


Figura 2. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño
Fuente: MEN (2017) Informe nacional de resultados examen saber pro 2016

De otra parte, al realizar el análisis de los resultados por grupos de referencia a nivel nacional se observa un promedio general de 150.85 puntos, lo cual es un promedio muy bajo. Los cuatro programas que se destacan en la competencia de razonamiento cuantitativo son: Ciencias naturales y exactas, Economía, Ingeniería y Medicina (ver figura 3).

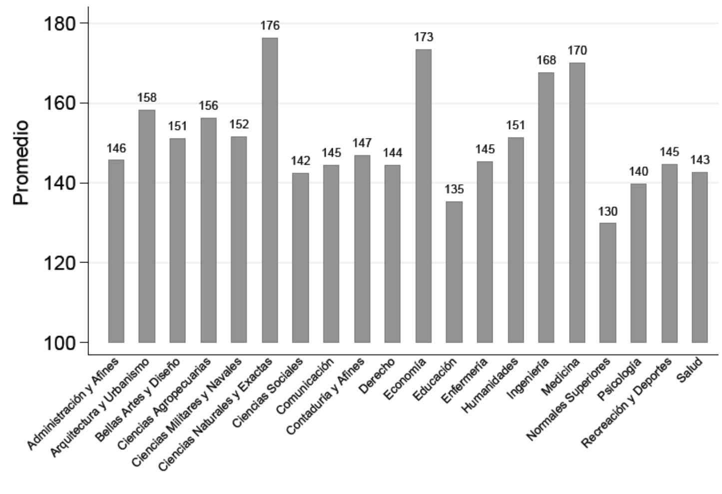


Figura 3. Promedio en el módulo de Razonamiento Cuantitativo
Fuente: MEN (2017) Informe nacional de resultados examen saber pro 2016

1.4.3.3. *Institucionales*

La Institución Universitaria Antonio José Camacho (UNIAJC) es una entidad de carácter público, ubicada en la ciudad de Santiago de Cali (Colombia), comprometida con la formación integral de excelencia en diferentes niveles y metodologías de la educación superior, que contribuye de manera significativa al avance de la ciencia, la tecnología, la cultura, a la transformación socioeconómica y al desarrollo de la región y del país.

Los bajos costos educativos, las gestiones que se realizan con diferentes entidades financieras para ofrecer créditos educativos de fácil acceso y con bajas tasas de interés, la presentación a convocatorias gubernamentales y los convenios interadministrativos suscritos son factores que contribuyen a que la demanda estudiantil de la Institución, en su mayoría, provenga de una población perteneciente a los niveles socioeconómicos 1, 2 y 3, egresados de Instituciones de Educación Media oficiales de la ciudad de Cali y de sus municipios aledaños, quienes se caracterizan por presentar dificultades de tipo socio-económico. Adicionalmente, por políticas de inclusión, la UNIAJC no tiene como requisito de admisión exigir un puntaje determinado en las pruebas Saber 11º, o realizar entrevistas y pruebas escritas de selección. Por todo esto, los estudiantes de primer semestre de los programas de formación tecnológica llegan con muchas deficiencias en la formación básica de matemáticas tal y como lo demuestran las pruebas diagnósticas que se implementan.

De acuerdo al informe de la oficina del Programa de Mejoramiento Académico (PMA) de la UNIAJC, que aplica cada periodo académico una prueba diagnóstica a todos los estudiantes que se vinculan en primer semestre de los diferentes programas académicos que se ofertan, el 7.5% de 998 estudiantes, aprobó la prueba que se aplicó en el periodo 2018-I. Esta prueba estuvo conformada por un total de 25 preguntas que abarcaban los 5 pensamientos matemáticos, de las cuales 6 preguntas correspondían al pensamiento variacional.

De acuerdo a esta prueba se puede determinar que los estudiantes que ingresan a los primeros semestres de la UNIAJC llegan muchas deficiencias en el pensamiento matemático, razón por la cual se plantean los siguientes objetivos y preguntas en el marco de esta investigación.

1.5. Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos de investigación que se sustentan en los diferentes ítems desarrollados anteriormente y que en términos generales buscan desarrollar el concepto de función en los estudiantes de primer semestre de la UNIAJC de los programas adscritos a la Facultad de Ingenierías.

1.5.1. *General*

Diseñar una propuesta de aula relacionada con el aprendizaje del concepto de función tomando como referente el enfoque de resolución de problemas y la mediación instrumental.

1.5.2. *Específicos*

- Identificar las creencias, concepciones y pensamientos que tienen los estudiantes de primer semestre de programas tecnológicos sobre el concepto de función.
- Proponer un instrumento de mediación que propicie el aprendizaje del concepto de función a la luz del enfoque de resolución de problemas y de la mediación instrumental.

- Analizar el impacto que tiene el uso de las TIC en la enseñanza del concepto de función.
- Clasificar los contextos que pueden utilizarse para promover el aprendizaje del concepto de función en estudiantes universitarios.

1.6. Preguntas

Cada una de las siguientes preguntas se corresponde con cada uno de los objetivos planteados.

1.6.1. *Central*

¿Qué caracteriza el diseño de una propuesta de aula que propicie el aprendizaje del concepto de función desde el enfoque de resolución de problemas y desde la mediación instrumental?

1.6.2. *Auxiliares*

- ¿Cuáles son las creencias que tienen los estudiantes de primer semestre de tecnologías sobre el concepto de función?
- ¿Qué características tiene un instrumento de mediación para promover el aprendizaje del concepto de función con estudiantes universitarios?
- ¿Qué papel desempeña el uso de las TIC en el aprendizaje del concepto de función en el contexto universitario?
- ¿Qué acciones pueden ser implementadas para contribuir al aprendizaje del concepto de función y sus sistemas de representación?

CAPÍTULO II: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Introducción

En este segundo capítulo se presenta el marco teórico que permite entender el problema articulando cuatro dimensiones. Una dimensión histórico-epistemológica que revisa la evolución histórica del concepto de función; una dimensión didáctica que se centra en el movimiento de la resolución de problemas tomando como referente los trabajos de Polya, Schoenfeld y Santos; una dimensión cognitiva en la que aparece el estudio de los sistemas de representación semiótica de Duval, y una dimensión tecnológica articulada con la dimensión cognitiva, en la que aparece la mediación instrumental vista desde el trabajo Moreno.

2.2. Análisis histórico epistemológico de la evolución del concepto de función

La noción de función que se moviliza en las aulas de clase está desprovista tanto del contexto matemático que la generó como de toda la historia en que fue gestada. Esta presentación de los objetos matemáticos descontextualizados de su origen, según Brousseau, G. (1986):

> Elimina completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para tantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y cuestiones nacidas de los progresos en otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados y las innumerables discusiones que han ocasionado.

Sin embargo, para el marco teórico de este trabajo es necesaria esta revisión porque, como lo manifiesta Artigue (1991), la revisión histórica permite:

> Desprenderse de la ilusión de la transparencia de los objetos del saber que ella manipula, ayudando, con ello, al didacta a liberarse de las representaciones epistemológicas erróneas que tiende a inducir su práctica de enseñanza" y además permite tomar en consideración "toda la pluralidad de puntos de vista posibles que históricamente han estado asociados, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que le han sido asociados y observar su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas.

Las primeras ideas intuitivas de la noción de función se remontan a más de 2000 a.C. con los Babilonios, pero para esta investigación se toman como referencia las dos últimas etapas propuestas por Youschkevitch (1976) en su estudio sobre la evolución del concepto de función: se toma la edad media y el periodo moderno para analizar la evolución histórica de la noción de función y de sus representaciones, pues en estas se desarrollan las matemáticas que en definitiva marcaron el desarrollo de lo que hoy conocemos como función.

2.2.1. *En cuanto a la edad Media (476 d.C. - 1453 d.C):*

La noción de función, tal y como la conocemos en nuestros días, aun no se había constituido. Existían algunos antecedentes correspondientes a la época antigua que insinuaban una noción implícita de función, además persistía un distanciamiento entre el estudio de los fenómenos naturales y su relación con las matemáticas. Solo entre los siglos XII y XVII dicho distanciamiento se reduciría al cobrar interés un estudio más racional de los fenómenos naturales, trayendo consigo la incursión de las matemáticas en los fenómenos físicos, los cuales estaban sujetos a la noción de cambio.

Este interés se vio reflejado en la teoría de la “intensidad de las formas” o “teoría de los cálculos” (calculationes) de William Heytesbury (1313-1372/3) y Richard Swineshead desarrollada en Inglaterra en el siglo XIV (Ruiz, 1998), donde las cualidades o formas eran fenómenos que podían poseer muchos grados de intensidad y que cambian continuamente entre ciertos límites. Una forma era cualquier cantidad o cualidad variable en la naturaleza. La intensidad (intensio) o latitud de una forma era el valor numérico que había que asignarle en relación a otra forma invariable, que llamaban extensión (extensio) o longitud (la distancia, el tiempo, o la cantidad de materia) (Ruiz, 1998).

En este desarrollo surgió la idea de relación funcional, dando pie al surgimiento de dos conceptos fundamentales: el primero la noción de cantidad variable y el segundo la noción de cantidad invariable; ambas nociones fundamentales en lo que hoy llamamos variable dependiente e independiente de una función, especialmente, en cuanto a su registro algebraico. De igual manera, se empezaba a esbozar una noción de continuidad y de dominio. Frente a esta nueva propuesta fue surgiendo la noción de relación funcional pues como lo manifiesta Crombie, A. C. (1979):

> Existía una concepción sistemática de las variaciones concomitantes entre causa y efecto; expresando el fenómeno que debía ser explicado" (la variable dependiente como la llamamos ahora) como una función de las condiciones necesarias y suficientes de su producción (las variables independientes), se puede mostrar exactamente cómo están relacionados los cambios de la primera con los cambios de la segunda. (Citado en Ruiz, L., 1998, p. 112)

De otra parte, en Francia, Nicolás Oresme (1323-1382) iniciaba el estudio del cambio apoyándose en la teoría de la intensidad y empleando representaciones por la vía geométrica. En su obra "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" el objetivo de Oresme, según Ruiz (1998), era representar geométricamente "las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud análoga", "todo lo que varía, se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo". Por ejemplo, Oresme, para representar el cambio de velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo (longitud) y los diferentes instantes de velocidad por medio de líneas verticales (latitud). Oresme distinguía tres tipos de relaciones diferentes:

- Uniformemente uniformes: En términos modernos, podemos asociar estas figuras con una representación de velocidad constante. Para cada instante de tiempo o longitudes (punto sobre el segmento horizontal), Oresme trazaba un segmento de recta perpendicular en cada punto (latitudes). Ver figura 4

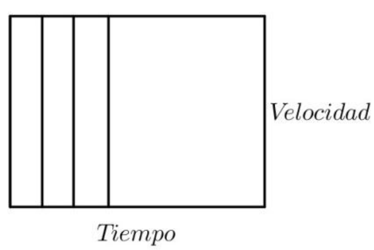


Figura 4: Relación uniformemente uniformes
Fuente: Ruiz (1998)

- Uniformemente deformes: Estas figuras correspondían a representaciones de velocidades con aceleración constante. Ver figura 5.

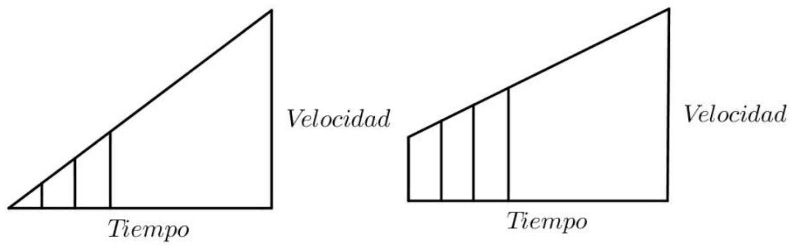


Figura 5: Relación uniformemente deformes
Fuente: Ruiz (1998)

- Deformemente deformes: Correspondían a aceleraciones no constantes de velocidad. Ver figura 6.

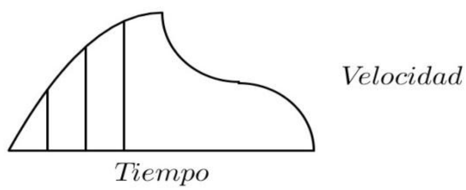


Figura 6: Relación deformemente deforme
Fuente: Ruiz (1998)

Hasta este punto, los aportes de William Heytesbury y Richard Swineshead y el trabajo de Nicolás Oresme enriquecían lo que más adelante llamaríamos representaciones algebraicas y gráficas de la noción de función. El trabajo de Oresme se constituiría, primero, en un antecedente importante de lo que es hoy el sistema de coordenadas cartesianas y, segundo, en un antecedente de lo que hoy llamamos representación gráfica de la noción de función, pues establecía la relación de cambio entre dos magnitudes mediante una representación geométrica.

En el periodo de transición entre la edad media y el periodo moderno surgen una serie de situaciones históricas que abonarían el terreno hacia la construcción y consolidación de lo que es la noción de función hoy en día. Por ejemplo, entre los siglos XV y XVI se distinguen dos momentos importantes: por una parte se fortalece y perfeccionan el simbolismo algebraico contribuyendo con ello a la distinción de lo que hoy llamamos incógnita y variable. Por otra parte, se distingue la trigonometría de la astronomía y esta es tratada, a su vez, como una ciencia distinta de las matemáticas.

Los estudios de Galileo Galilei (1564-1642) sobre los cuerpos celestes se centraron en la búsqueda de resultados y de relaciones basados en la experiencia más que en la abstracción. Galileo tuvo el deseo de relacionar las causas y los efectos de lo observado contribuyendo con esto a la concepción de variable dependiente.

A finales del siglo XVI, Nicolas Chuquet (1445-1500) estudió las relaciones entre las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Observó que si hacía corresponder los términos de igual rango de estas progresiones, la suma de dos números de la progresión aritmética coincidían con el producto de los números correspondientes a la progresión geométrica. Con Chuquet surge la noción de logaritmo. De otra parte Neper (1550-1617), a diferencia de Chuquet, comparó dos movimientos uno uniforme y otro tal que su velocidad se supone proporcional a una distancia en un punto fijo. Para este periodo se muestra una estrecha relación entre número y magnitud.

2.2.2. *En cuanto al periodo moderno:*

En el Periodo Moderno diferentes sucesos en la evolución de las matemáticas contribuyeron al desarrollo de la noción de función como hoy la conocemos: la constitución de los números reales. La dependencia del álgebra y la geometría y el estudio del movimiento como un problema central en matemáticas conllevan a diferentes matemáticos a portar para tal fin. Por ejemplo, a diferencia de la época antigua, en la que era necesario un procedimiento con regla y compás para construir una curva, Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) en el siglo XVII dan un paso gigantesco al establecer que una ecuación algebraica representaría a una curva sin hacer uso excesivo de construcciones geométricas. Este avance permitió traducir cualquier problema de la geometría euclidiana a un problema algebraico, fundando así el inicio de la geometría analítica. Descartes fue el primero en establecer una relación de dependencia entre dos variables, permitiendo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de asignarle valores a la otra.

La consecución de la geometría analítica fue un detonante para la formación del análisis infinitesimal, que a su vez fortaleció el cálculo integral, el cálculo diferencial y la teoría de series. Aquí los aportes de Newton (1642-1727), Lagrange (1736-1813) y Euler (1707-1783) fueron valiosos.

Newton fue uno de los primeros matemáticos en mostrar cómo las funciones se podrían desarrollar mediante una serie infinita de potencias, lo que permitió la intervención de procesos infinitos. En este proceso usó el concepto de fluente para referirse a variables independientes y el término "relata quantitas" para referirse a variables dependientes, término que se aproximaba a la noción de función. Mientras tanto, Leibniz (1646-1716) fue quien usó por primera vez la palabra función para designar, en términos muy generales, la dependencia de las cantidades geométricas. Con Newton y Leibniz el cálculo integral y diferencial se hacen más potentes, pues permiten explicar los fenómenos naturales a partir de ecuaciones diferenciales.

Hasta este momento aun el concepto de función era muy restringido pues solo hacía referencia a las funciones analíticas, abarcando así las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y las desarrollables en series de potencia. Es Jean Bernoulli (1667-1748) quien considera por primera vez la función como una expresión analítica: "llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes" (Boyer, 1986. p. 531), y además propone la letra para designar las funciones.

Euler, discípulo de Bernoulli, posiciona el concepto de función como un objeto relevante en las matemáticas, desligándolo de la concepción de herramienta que había hasta entonces gracias a los problemas que generalmente eran de física. Euler reescribe la noción de función tomando como referencia la definición de Bernoulli: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes".

Lagrange va un poco más allá y se propone sintetizar el cálculo reduciéndolo exclusivamente al álgebra. Escribió dos tratados sobre funciones: teoría de funciones analíticas y lecciones sobre cálculo de las funciones. Define el concepto de función como:

> Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión del cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideraremos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas (Ruiz, 1998).

El problema de la cuerda vibrante en el contexto de la física-matemática, en la que se consideran vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremos, propició la necesidad de definir funciones más generales, primero, funciones a trozos y, segundo, funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica. Esta situación conllevó a que Euler reconsiderara su definición de función y propusiera una segunda definición:

> Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades, de tal manera que si las otras cambian, estas cambian también, entonces, tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las formas por las cuales una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de qué manera, son llamadas funciones de x.

El problema de la cuerda vibrante permitió a Fourier (1768-1830) mostrar que ciertas funciones no continuas pueden representarse por una serie trigonométrica que converge a la forma ecuación en la cual se pueden determinar sus coeficientes. Este resultado permitiría al análisis explorar una idea más formal de funciones.

Por su parte Dirichlet (1805-1859), además de transcribir la obra de Fourier a un lenguaje más formal desde el punto de vista matemático, definió la noción de función como una correspondencia y propuso la primera función que no estaba dada como una expresión analítica, ni con una representación gráfica clara. También presentó una función que es discontinua en todas sus partes. A partir del trabajo de Dirichlet la noción de función tomó un rumbo independiente de expresión analítica.

Weierstrass (1815-1897) construyó una función continua que no es derivable en ningún punto de su dominio. Junto a Cantor (1845-1918), quien generó una nueva evolución del concepto de función desde la teoría de conjuntos.

La evolución de la noción de función continúa desde el concepto de correspondencia al concepto de relación. Con la introducción del espacio métrico, espacios topológicos, espacio de Hilbert y espacio de Banach se han desarrollado nuevas definiciones de función.

El grupo Bourbaki que se dio a la tarea, desde 1939 de realizar una revisión y sistematización de las matemáticas con un enfoque conjuntista, presentó una definición de función eliminando las ideas intuitivas de variación. Esta definición fue: *Una función f es un conjunto de pares ordenados de números $F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ con la propiedad de que si $(x_k, y_k) \in F$, si $\left(x_p, y_p\right) \in F$ y si $x_k = x_p$, entonces $y_k = y_p$* (Hitt, F., 2002, p. 75). Dirichlet también se caracterizó por realizar un planteamiento similar al del grupo Bourbaki.

De esta manera, desde las primeras ideas intuitivas del concepto de función con los Babilónicos hasta la definición conjuntista del grupo Bourbaki y Dirichlet se ha construido social y culturalmente dicha noción. Hoy en día podemos identificar cuatro énfasis en la presentación de la noción de función en los libros de texto que han circulado durante todo el siglo XX, según Hitt (2002):

- Función en términos de variables: Una función es una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.
- Función en términos de conjuntos de parejas ordenadas: Una función es un conjunto de pares ordenados, no dos de los cuales tienen la misma primera componente.

- Función en términos de regla de correspondencia: Una función de un conjunto *A* a un conjunto *B* es una regla de correspondencia que asigna a cada *x* de cierto subconjunto *D* de *A* un elemento determinado de manera única *f(x)* de *B*.
- Función en ambiente logo (o de procedimiento): Una función es un procedimiento P que tiene la propiedad de que cualesquiera dos apelaciones a P con las mismas entradas producen las mismas salidas.

Hasta este punto se puede inferir tres planteamientos importantes:

- En primer lugar, la evolución y constitución de la noción de función como un objeto matemático es sin lugar a dudas una construcción humana que ha implicado innumerables aportes tanto de matemáticos, de físicos y de muchas otras disciplinas. Esta revisión histórico-epistemológica ha permitido confirmar que el quehacer matemático y, en especial, entender que la comprensión del concepto de función en los estudiantes no es cuestión de una o dos clases para cumplir con dicha meta, pues a la humanidad le ha tomado más de 2000 años plantear dicho objeto matemático, que sin lugar a dudas seguirá evolucionando frente a las nuevas demandas de la sociedad.
- En segundo lugar, se supone que entre más se avanza en la precisión de las nociones matemáticas más fácil es su comprensión. Pero esto no ha sido así, pues en el caso de la noción de función y el nivel de abstracción que adquirió hizo que se perdieran algunas características que formaron parte de su evolución tal como su relaciones con algunos contextos de la realidad, como ocurrió, entre otros, con los estudios de William Heytesbury y Richard Swineshead relacionando las funciones con la física. Esta situación hace que la comprensión de la noción de función en el contexto educativo actual sea difícil, razón por la cual se hace pertinente vincular la construcción de la noción de función a contextos o situaciones de la realidad tratando de emular en el aula de clase una pequeña comunidad científica o matemática con los estudiantes.
- En tercer lugar, la evolución de la noción de función ha implicado el análisis de distintas representaciones del mismo objeto matemático en diferentes contextos.

Por ejemplo, Lagrange se apoyó y enriqueció la representación algebraica de la noción de función incorporando las letras en sus aportes. De otra parte, Oresme, Descartes, entre otros, fortalecieron la representación gráfica de la función potencializando la visualización de dicho concepto. Estos aspectos, en el contexto educativo actual, se constituyen en fortalezas para la comprensión de la función, pues entre más representaciones se estudian de la noción de función más se enriquece su comprensión y fijación en la mente de los estudiantes.

2.3. Enfoque Didáctico de Resolución de Problemas

2.3.1. *Génesis de la resolución de problemas*

El enfoque de resolución de problemas surge como un movimiento dentro del aprendizaje significativo de la década del 50 del siglo XX, en la que se pretendía restructurar la educación matemática del momento. Dentro del aprendizaje significativo aparecen tres movimientos vinculados: el movimiento de las matemáticas modernas, el regreso a lo básico y la renovación pedagógica en la que aparece la resolución de problemas.

2.3.1.1. *El Movimiento de las Matemáticas Modernas (MMM)*

Este movimiento se caracterizó por centrar sus procesos de enseñanza y de aprendizaje en estructuras matemáticas, implementar un método axiomático riguroso, fundamentar todo desde la teoría de los conjuntos e incluir una fuerte y amplia simbología matemática (Gómez, A. 2010). Ligado al MMM se realizaban cambios en los contenidos de los programas académicos y se proponían nuevos textos escolares y universitarios. De acuerdo con Santos L. (1997) en este movimiento se reconocía la importancia de presentar formalmente las ideas matemáticas y, por esta razón, los estudiantes desde la educación elemental deberían abordarla.

Según Benítez (2017) entre las principales características del MMM y sus efectos aparecen: La presencia de las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en álgebra; más rigor lógico en la comprensión contraponiendo los aspectos operativos y manipulativos; fundamentación en la teoría de conjuntos y en el estudio del álgebra; el estudio de la geometría elemental se ha abandonado como consecuencia del advenimiento de las matemáticas modernas, y la desaparición de la geometría trajo consigo la consecuencia del desplazamiento de problemas interesantes y sustituidos por ejercicios en los que se pedía contemplar tablas de valores de verdad de dos o más proposiciones.

Esta reforma empezó a debilitarse y perder valor cuando en los años 70 se percibió que muchos de los cambios implementados no habían resultado acertados, por ejemplo, la carencia de la intuición espacial en los estudiantes fue consecuencia de la desaparición de la geometría de los programas académicos.

De acuerdo a Benítez (2017) los estudiantes eran capaces de trabajar operaciones entre conjuntos, propiedades de los números naturales, dominaban palabras técnicas de las matemáticas, pero presentaban dificultades con las operaciones entre naturales con números fraccionarios y no interpretaban el significado de las respuestas a un problema.

2.3.1.2. *El regreso a lo básico*

El regreso a lo básico fue una contrareforma surgida como respuesta al MMM, que le daba importancia a los procesos algorítmicos y a las cuatro operaciones básicas con enteros, fraccionarios y decimales (Santos, 1997 en Benítez, 2017). Pero esta reforma tampoco fue plenamente aceptada por la comunidad académica, pues dominar lo fundamental tampoco era suficiente, si se entendía por esto la repetición y la memoria junto con la solución de extensas listas de ejercicios en los que se pide la aplicación mecánica de algoritmos (Santos, 1997).

2.3.1.3. *Renovación pedagógica*

La renovación pedagógica está ligada a la década de los setenta cuando comunidades de docentes de matemáticas en el mundo manifestaron su desacuerdo por el MMM. Estas comunidades formaron un movimiento denominado de “Renovación Pedagógica” del que empezaron a surgir textos y métodos alternativos que reivindicaron cambios en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas dejando de lado las concepciones de una enseñanza de la matemática centrada solo en su rigurosidad y en una didáctica memorística. Frente al surgimiento de estos movimientos se distinguieron dos tendencias en la enseñanza de las matemáticas (Pérez, A., 1992): La primera tendencia intentaba priorizar las matemáticas y su entorno buscando así la motivación, la interdisciplinariedad, abordar problemas de la realidad e integrar la realidad cultural. Consideraban las matemáticas como una ciencia auxiliar y como un instrumento cultural. En España, en la década de los 70s, se destacó el Grupo Cero de Valencia y en Holanda se destacó la escuela holandesa de Freudhental. El primero fue un grupo que inició actividades en el año de 1975 y que constituían una crítica a los currículos de matemáticas de su momento centrado en las matemáticas modernas (Gairín, J., 2001). Su crítica se fundamentaba en cuatro ideas principales: (1) se necesitan distintas perspectivas para el aprendizaje de las matemáticas, (2) el rigor de las matemáticas admite distintos niveles, (3) las matemáticas de los alumnos no pueden quedar reducidas al uso de técnicas y (4) el destino de la enseñanza de las matemáticas no es el de la división social.

El segundo grupo nace en Holanda también como reacción al MMM de los años 70´s y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en ese entonces en las escuelas holandesas. Esta corriente se identifica con el nombre de Educación Matemática Realista y reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal (1905-1990).

Una segunda tendencia se centraba en la resolución de problemas referenciando el trabajo de Polya. El consejo nacional de profesores de matemáticas de los Estados Unidos, NCTM por su sigla en inglés, recomendaba en los 80s que el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas era la resolución de problemas.

2.3.2. *El trabajo de Georges Polya*

En su libro titulado *Como plantear y resolver problemas*, Polya, G. (1945) discute el potencial de los métodos heurísticos para resolver problemas y pone en discusión diferentes estrategias. En palabras de Polya, la heurística moderna “Trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso". Su trabajo está orientado hacia la enseñanza de las matemáticas y muestra que en la base sobre la que se construyen los métodos heurísticos aparecen aspectos lógicos, psicológicos, la experiencia objetiva y la observación de los métodos de otros.

Para Polya la resolución de problemas es un proceso conformado por cuatro etapas:

I. Comprender el problema: En esta etapa, se hace referencia a las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. ¿Cuál es la información dada por el problema?, ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las condiciones que relacionan los datos del problema? son preguntas pertinentes que permiten esclarecer la información necesaria para comprender el problema.

II. Concebir un plan: Polya señala que "lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirle a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele un plan", Santos, L. (1998). En esta etapa deben aflorar las estrategias heurísticas que pueden resultar de utilidad. Según Polya (1945) estas estrategias, como por ejemplo descomponer el problema en subprobemas, resolver problemas más simples, usar diagramas para representar un problema, entre otros, no garantizan éxito en la resolución del problema planteado, pero son de gran ayuda (Citado por Benítez, D., 2017).

III. Ejecución de un plan: En esta etapa Polya hace referencia a los aspectos que ayudan a monitorear el plan concebido y ayudan a materializarlo hasta obtener una solución.

IV. Visión retrospectiva: En esta etapa se destaca que el final del proceso no es haber encontrado la solución del problema. Cuando el resolutor supone que ya ha solucionado el problema, debe iniciar la última etapa del proceso la cual consiste en verificar los resultados, explorar caminos más cortos y aplicar el resultado obtenido en la solución de otro problema.

Tal y como lo señala Schoenfeld (1992), Polya plantó las semillas del "movimiento" de resolución de problemas que se desarrolló en los años ochenta.

2.3.3. *El trabajo de Schoenfeld*

Apoyándose en las ideas de Polya, Schoenfeld, A. (1985) plantea en su obra *Mathematical Problem Solving* un método para resolver problemas en el cual determina que las heurísticas no son el único factor que se debe tener en cuenta para resolución de un problema, sino que se debe tener en cuenta otros factores:

I. Dominio de los conocimientos o recursos: Aquí hace referencia al conocimiento previo de un individuo y a las formas en que adquiere ese conocimiento, es decir, son los recursos que pueden contribuir a la ejecución de la resolución de un problema en un dominio matemático en particular. Schoenfeld (1992) presenta un amplio rango de recursos: el conocimiento informal e inductivo acerca del problema, el conocimiento de hechos y definiciones, la habilidad para ejecutar procedimientos algorítmicos, la familiaridad con procedimientos rutinarios, la posesión de un espectro de competencias relevantes, el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje del dominio.

II. Estrategias cognitivas, métodos heurísticos: Al igual que Polya, Schoenfeld toma los métodos heurísticos como las acciones que son útiles para avanzar en la resolución de problemas. Señala que no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias, también es importante que el estudiante sepa cuándo y cómo utilizarlas.

III. Estrategias metacognitivas: La metacognición hace referencia al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de problemas (Santos, 1997). En este sentido, el control sobre las decisiones y las tareas de ejecución en el proceso de solución de un problema no se rezaga al final, es un ejercicio permanente de evaluación. Las estrategias metacognitivas monitorean el proceso y ayudan a tomar decisiones en momentos claves, por ejemplo, al seleccionar estrategias o a cambiarlas en un momento determinado. Schoenfeld identifica tres categorías donde se presenta la metacognición:

a. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar
b. El control y la autorregulación.
c. Creencias e intuiciones

IV. Sistemas de creencias: En esta categoría se ubica la concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas. Lo que se piense acerca de la disciplina determina la forma cómo se selecciona determinada dirección o método para resolver un problema. Las creencias determinan la manera como aborda una persona el problema; por ejemplo, las técnicas que emplea o evita, o el tiempo que le dedica al estudio reflejan las creencias de la persona. Se puede afirmar que "las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control" (Shoenfeld, 1985, p.45).

2.3.4. *El trabajo de Santos*

Así como Schoenfeld se apoyó en las ideas de Polya para mejorar el método de resolución de problemas, Luz Manuel Santos Trigo integra el método de Alan Schoenfeld y de otros autores para determinar un modelo de análisis de la resolución de problemas que favorece la participación activa del estudiante discutiendo, proponiendo y construyendo el conocimiento a partir de la conexión de las matemáticas con otras áreas del conocimiento por medio de la transferencia, métodos y el desarrollo de la inteligencia con el uso de estrategias generales y particulares (Santos, 2007).

De acuerdo a Barrera, F. y Santos, L. (2002) el maestro debe diseñar situaciones o problemas donde el estudiante tenga la oportunidad de valorar la importancia de plantear preguntas, utilizar distintos recursos y estrategias que le permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. Además, la situación puede estar inmersa en múltiples contextos y ofrecer al estudiante la oportunidad de establecer conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en que se presenta. En este sentido se pueden distinguir tres tipos de escenarios:

- Contextos puramente matemáticos: Hace referencia a problemas que involucran aspectos puramente matemáticos, "aquí, el principal interés, desde el punto de vista instruccional, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un método o camino de solución". (Barrera, F. y Santos, L., 2002).
- Contextos del mundo real: En estos interviene una situación de la vida real en la que sus variables y relaciones entre ellas se examinan a través de un modelo matemático. El tratamiento de ese modelo matemático permite entender el comportamiento de la situación real. Pueden presentarse diferentes modelos para una misma situación, pero cada uno de ellos ofrece ventajas o desventajas en el entendimiento o tratamiento de la situación.
- Contextos hipotéticos: Son situaciones que se construyen a partir de suposiciones de las relaciones de las variables o de los parámetros que intervienen en el problema. En estas situaciones se puede resaltar el uso de diversas representaciones y estrategias que muestran el potencial de diversos contenidos matemáticos y también contrastar distintas cualidades asociadas a las diversas formas de solución. Estas situaciones permiten regular los recursos matemáticos que los estudiantes usarán para entender y participar en un proceso de solución.

En los tres tipos de contextos los estudiantes deben entender la situación problema, planear formas de solución y deben comunicar las soluciones. Se ven obligados a utilizar diferentes representaciones, planear argumentos, comunicar e interpretar sus soluciones.

2.4. Sistemas de Representaciones Semióticas

Los objetos matemáticos son ricos en representaciones semióticas y conocerlos implica un conocimiento de dichas representaciones. Duval (2004) afirma que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación.

La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro.

Los sistemas semióticos han de permitir que se cumplan tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

- Constituir una marca perceptible que sea identificable como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- Convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicar otros significados relativos a aquello que es representado.

2.4.1. *Registro de representaciones semióticas*

Una representación puede permitir el acceso al objeto representado solo cuando se cumplen dos condiciones.

- Que se dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso.
- Y que espontáneamente pueda convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo.

2.4.1.1. Tratamiento: Es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o una necesidad, que proporciona el criterio de interrupción en la serie de trasformaciones efectuadas que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación.

2.4.1.2. Conversión: Es la transformación de la representación de un objeto de una situación o de una información dada en un registro, una representación de este mismo objeto en otro registro. La conversión es pues una transformación externa relativa al registro de la representación de partida.

2.4.2. *Coordinación de Registros de Representación Semiótica*

La coordinación consiste en la movilización y la articulación “inmediatas” de los registros de representación semiótica y supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro (Duval, 1999).

Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. De esta manera no se requiere la utilización hacia el exterior de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.

2.5. Mediación Instrumental

En los enfoques psicológicos de corte socio-cultural la cognición humana está mediada por herramientas técnicas (o materiales) y herramientas simbólicas (o psicológicas) como los signos, el lenguaje o conductas de otros. El uso de estos instrumentos dan forma a la acción del sujeto y también la transforman, median sus desempeños en la realización de alguna tarea; esta mediación puede favorecer la acción, en términos de alcanzar su objetivo o pueden obstaculizarlos. En otras palabras, como lo manifiesta Lupiañez, J. y Moreno, L. (2001), “La naturaleza de conocimiento producido depende de la herramienta”, por tanto la acción debe ser estudiada conjuntamente a los instrumentos mediadores, identificando el papel efectivo de los instrumentos de mediación en una determinada situación y con unos sujetos dados.

Cuando se incorpora TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y particularmente Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) habrá una gran ganancia en las múltiples representaciones que podemos movilizar en dichos ambientes. Estas tecnologías se constituyen en herramientas de mediación en la construcción y estructuración del conocimiento matemático en los estudiantes.

2.5.1. *Matemáticas y sistemas de representación*

En el contexto de la educación matemática el estudio de las representaciones juega un papel muy importante, por ejemplo, la NCTM (1998) sugirió el estudio de las representaciones como uno de los propósitos principales.

2.5.1.1. *Representaciones ejecutables*

Los ambientes de geometría dinámica proporcionan ciertas representaciones que se caracterizan por ser portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario, por ejemplo, cuando se traza la gráfica de una función o se genera un cuadro de visualización o una representación numérica de una función. En este sentido, las AGD se constituyen como un sistema cognitivo con el que tenemos la oportunidad de comunicarnos y colaborarnos en la solución de ciertos problemas.

El GeoGebra es un software libre que ha sido caracterizado como AGD por Hart, Hirsch & Keller (2007), el cual permite articular múltiples representaciones de la geometría en 2D y 3D, el álgebra, las hojas de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un mismo ambiente informático. Esta última característica también enmarca al GeoGebra como un micromundo matemático, el cual se caracteriza por ser un software que permite crear un módulo interactivo, ya sea independiente o creado dentro de otro paquete que funciona como plataforma donde se trabaja una idea o concepto interactuando o manipulando elementos propios para este fin. (Sacristán, A., 2003). Los micromundos matemáticos se caracterizan, también, por ser sistema compuesto de objetos, relaciones entre estos objetos y operaciones que transforman los objetos y sus relaciones. El software GeoGebra cumple con estas características.

Este software se originó como producto de una tesis de su fundador Markus Hohenwarter en el año 2001que tenía como objetivo crear una calculadora de uso libre para trabajarl álgebra y la geometría de manera articulada. Entre las ventajas que tiene el software GeoGebra, están:

- Es libre: Tanto comunidades estudiantiles como profesores, pueden hacer uso del software sin pagar.
- Código abierto: Permite que en distintas partes del mundo se puede enriquecer dicho software.
- Dinámico: La hojas de cálculo, la vista algebraica, la vista geométrica en 2D y 3D son dinámicas e interactivas.
- Comunidad: Hay una gran comunidad de docentes, estudiantes e instituciones que respaldan y hacen parte de la comunidad GeoGebra lo que hace que a nivel investigativo se generen múltiples estudios tomando el software como instrumento de mediación.

En cuanto a las desventajas que hay alrededor del GeoGebra es la falta de documentación académica que reporte los fenómenos de transposición computacional en donde el universo matemático no se representa fielmente en el programa. Un ejemplo de este es la representación gráfica de la función logarítmica, la cual se presenta incompleta.

CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo se describe la metodología de investigación que se enmarca en un enfoque pre-experimental conformado por cinco fases. En primer lugar se detalla el tipo de estudio y los sujetos que participaron en la investigación. Posteriormente, se explican cada una de las fases que la integran, sus propósitos, el diseño, la validación, la recolección, el procesamiento y análisis de los datos.

3.2. Tipo de Estudio

La metodología de investigación se enmarca en un análisis pre-experimental en el que se han conformado 5 fases:

- Fase I: Se realiza la implementación de una prueba diagnóstica en la que se observa el dominio del concepto de función en los estudiantes pertenecientes a la muestra de estudio.

- Fase II: Se realiza una fase de capacitación en el uso básico del software GeoGebra.

- Fase III: Se realiza la intervención en el aula aplicando 3 actividades puntuales que se denominarán hojas de trabajo. Se concibe una hoja de trabajo como un instrumento de mediación entre la enseñanza y el aprendizaje que está conformada por tres partes: (1) Diagnostico, (2) La experimentación y resolución de problemas y (3) la socialización y la institucionalización.

- Fase IV: Se realiza una prueba final con el objetivo de observar los efectos de las hojas de trabajo respeto a las dificultades observadas en la fase diagnóstica.

- Fase V: Se implementa una encuesta valorativa donde los estudiantes manifiestan sus observaciones respecto a todo el proceso implementado en la metodología.

La figura 7 representa un esquema de la metodología de investigación:

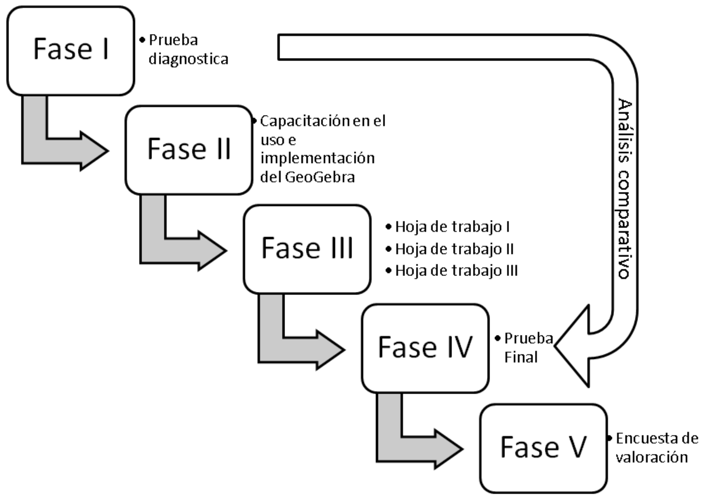


Figura 7. Fases de investigación
Fuente: Elaboración propia

3.2.1. *Sujetos*

En el periodo académico 2018-I de la Institución Universitaria Antonio José Camacho (UNIAJC) ingresaron un total de 347 estudiantes a los programas de tecnologías. Con estos estudiantes la Oficina de Admisiones y Registro Académico de la UNIAJC conformó 8 grupos de primer semestre agrupando los estudiantes por programas afines a una misma facultad. En la institución existes cuatro facultades (facultad de ingenierías, de ciencias empresariales, de humanidades y de educación distancia y virtual). Mediante muestreo por conglomerado, se seleccionó un conglomerado de los 8 antes descriptos. .

El conglomerado seleccionado al azar fue el grupo 102 perteneciente a la Facultad de Ingenierías, el cual está conformado por 44 estudiantes entre los que se encuentran alumnos de los programas de electrónica industrial, instrumentación industrial, mecatrónica industrial, producción industrial y sistemas de la información. Cabe resaltar que dentro del conglomerado se seleccionaron a todos los individuos que conforman tal conglomerado. En la figura 8 se muestra la distribución porcentual de estos estudiantes dentro del grupo.

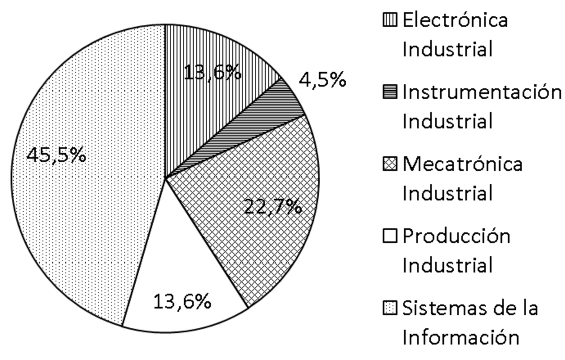


Figura 8. Porcentaje de estudiantes por programa en el grupo de estudio
Fuente: Elaboración propia

Es también de destacar que entre el grupo seleccionado hay 8 mujeres (18.2%) y 36 hombres (81.8%).

3.3.Fases de Estudio

A continuación, se detallan cada una de las fases de estudio en cuanto a sus propósitos, diseño, validación, recolección, procesamiento y análisis de los datos.

3.3.1. *Fase I: Prueba Diagnóstica.*

Propósito: El propósito fundamental de la prueba diagnóstica es establecer un punto de partida para el diseño de las hojas de trabajo a partir del sistema de creencias que tienen los estudiantes alrededor del concepto de función, dominio y rango. Pues tal y como lo menciona Schoenfeld (Santos, 1992) el sistema de creencias es una de las dimensiones que incide en la forma que los estudiantes resuelven problemas. De igual manera, se pretende identificar con qué definición de función están más familiarizados los estudiantes conforme a la clasificación que realiza Hitt (2002) en cuanto a la presentación del concepto de función que aparece en los textos escolares, al igual que revisar, matemáticamente, la definición de función de los estudiantes.

Diseño: La prueba diagnóstica está conformada por siete partes distribuidas de la siguiente manera (ver anexo 1):

- Parte 1: Conformada por la pregunta No. 1. Esta pregunta es abierta donde se le solicita al estudiante definir lo que considera es una función matemática.
- Parte 2: Conformada por la pregunta No. 2, la cual presenta 8 ítems numerados del 2A al 2H. Estas preguntas son de selección múltiple donde se le presenta al estudiante registros gráficos los cuales debe identificar con alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".
- Parte 3: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 3A al 3F, los cuales presentan registros semióticos conjuntistas en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".
- Parte 4: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 4A al 4F, los cuales presentan registros semióticos algebraicos en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".
- Parte 5: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 5A al 5F, en los cuales se le presentan al estudiante registros semióticos textuales en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".
- Parte 6: Se formula una pregunta abierta donde se le solicita al estudiante definir el concepto de dominio y de rango de una función.
- Parte 7: Se le presenta al estudiante una situación problema que contiene un contexto hipotético y a partir de este se le formulan 6 preguntas abiertas (de la 7A a la 7F) en relación a la situación planteada.

Validación: Una vez diseñada la prueba diagnóstica, se presenta al consejo del Departamento de Ciencias Básicas de la UNIAJC quienes aprobaron el diseño con algunas observaciones sobre las gráficas que se presentaron en la parte dos de la prueba (ver anexo 2). Las observaciones fueron acogidas y se procedió a aplicar la prueba piloto con 5 estudiantes del Programa de Mejoramiento Académico (PMA) que está conformado por estudiantes monitores de la institución. La finalidad del pilotaje era encontrar dificultades en la redacción, determinar la pertinencia de las preguntas, establecer un tiempo requerido para contestar el instrumento y someter a prueba la manera de analizar la información cualitativa y cuantitativa de los resultados del diagnóstico.

Recolección: La prueba diagnóstica se aplica de manera individual a cada uno de los 44 estudiantes del grupo seleccionado en formato impreso. Las evaluaciones se coleccionan para su procesamiento y análisis.

Procesamiento: En cuanto al procesamiento de las preguntas abiertas, que son las correspondientes a la parte 1, 6 y 7, se realiza una clasificación en cuanto al tipo de respuesta que dan los estudiantes de acuerdo a la representación que más utilizan. En cuanto a las preguntas de selección múltiple con única respuesta se realiza una tabla de frecuencia para su análisis.

La tabla 1 presenta la ficha de análisis que se implementa para la prueba diagnóstica y la prueba final. Esta muestra las categorías de análisis y los que se espera observar en cada una de ellas.

Tabla 1. Rejilla de análisis prueba diagnóstica y prueba final

CATEGORÍA DE ANÁLISIS	LO QUE SE ESPERA OBSERVAR
• Concepto el función	¿Cuál de las siguientes definiciones de función domina el estudiante? • En términos de variable • En términos de conjuntos de parejas ordenadas • En términos de regla de correspondencia • En términos de procedimiento
• Representaciones que usa para definir el concepto de función	¿Cuál es la representación que más asocia al concepto de función? • Gráfica • Textual • Algebraica • Conjuntista o numérica
• Sistemas de creencias en cuanto al concepto de función y sus representaciones	• ¿Cómo identifica las curvas de trazo continuo cerradas? • ¿Cómo identifica las funciones discontinuas? • ¿identifica las condiciones que deben cumplir para que una relación conjuntista sea función? • ¿Reconoce las funciones por partes? • ¿Reconoce funciones que no tienen la notación f(x)?

	• ¿identifica una relación funcional en un enunciado?

Nota: Se diseña tomando como referencia el marco teórico del proyecto de investigación
Fuente. Elaboración propia

3.3.2. *Fase II. Capacitación en el uso básico del software GeoGebra.*

Propósito: El objetivo fundamental de esta fase de investigación es dar a conocer a los estudiantes el software GeoGebra para que lo incorporen en sus procesos de aprendizaje y se constituya en instrumento de mediación. Aunado a lo anterior, también se pretende:

- Familiarizar a los estudiantes con la interface del software.
- Dar a conocer las diferentes vistas de representación que tiene el programa, algunas de las herramientas más representativas de cada una de las vistas y la articulación entre ellas.

- Familiarizar al estudiante con el concepto de variables dependientes e independientes a través de la herramienta "análisis de regresión de dos variables" que se activa cuando se seleccionan datos de la hoja de cálculo.

- Propiciar la visualización de diferentes representaciones de una misma situación problema.

Diseño: Esta actividad se desarrolla en 4 partes (ver anexo 7)

- Parte I: Esta parte está dirigida por el docente donde explica la interface del software GeoGebra. Se explica la barra de herramientas, la barra de menú y la manera como se activan y desactivan las diferentes vistas que ofrece software.
- Parte II: Situación problema en un contexto matemático. Se les presenta una lista de parejas ordenadas a los estudiantes, las cuales deben ser ingresadas a la vista hoja de cálculo para posteriormente representarlos en la vista gráfica a través de la herramienta lista de puntos; posteriormente, los estudiantes deben hacer uso de la función *análisis de regresión de dos variables*, de esta manara encuentran la expresión algebraica que se ajusta al listado de puntos. En esta

parte, se formula un interrogante a los estudiantes sobre que significa la expresión algebraica encontrada y para que se puede utilizar.

- Parte III: Situación problema en un contexto real. Se les formula a los estudiantes una situación que consiste en determinar la relación entre el número de apretones de mano que hay entre un grupo de personas y el número de personas de dicho grupo. Los estudiantes deben conformar equipos de trabajo y ejecutar los saludos al mismo tiempo que elaboran la tabla numérica que muestra la relación entre número de personas que se saludan y número de apretones de mano. Posteriormente, la tabla debe ser elaborada en la vista numérica para crear la lista de puntos y luego hacer uso de la herramienta de regresión de dos variables. Los estudiantes deben seleccionar el modelo de regresión que más se aproxime a los puntos graficados para posteriormente usarlo en la resolución de un interrogante en el que deben calcular el número de apretones de mano que hay para un grupo de 44 personas.
- Parte IV: Situación problema en un contexto hipotético. Se trabaja con los estudiantes una situación en el que se les presenta una situación de crecimiento poblacional de la bacteria ***Escherichia coli*** y se les realiza una serie de preguntas. Los estudiantes deben construir una tabla numérica en la que se refleje el crecimiento poblacional de la bacteria según las condiciones del contexto y deben hacer una representación gráfica de dicha relación. De igual manera deben hacer uso de la herramienta de regresión para encontrar la expresión algebraica que más se ajusta a los valores y contestar unas preguntas en las que deberán hacer uso de dicha expresión.

Validación: Al igual que la prueba diagnóstica, se presenta ante el consejo del Departamento de Ciencias Básicas para recibir observaciones al respecto (Ver anexo 2). Esta actividad no tuvo ninguna observación y tampoco se realiza prueba piloto, ya que es una actividad de capacitación en el uso del GeoGebra.

Recolección: La guía de trabajo para esta actividad de capacitación se entrega en formato impreso, la cual es recolectada al final de la misma. Cada estudiante tiene su respetiva guía de trabajo.

Procesamiento: Se realiza una caracterización de las apreciaciones que hacen los estudiantes respecto la actividad propuesta, en particular frente al uso de la tecnología.

3.3.3. *Fase III: intervención en el aula*

Propósito: El propósito fundamental de las tres hojas de trabajo es propiciar el aprendizaje del concepto de función, dominio y rango a través de situaciones problema en contextos reales e hipotéticos, involucrando las TIC como proceso de mediación. De igual manera, las hojas de trabajo a implementar buscan desvirtuar los sistemas de creencias falsos que se hayan identificado en la prueba diagnóstica y que dificultan el aprendizaje del concepto de función y su identificación en diferentes representaciones matemáticas.

Diseño: Las hojas de trabajo comparten un mismo diseño. Cada una presenta una situación problema en un contexto específico pertinente para confrontar los sistemas de creencias de los estudiantes con la realidad. Están conformadas por tres partes:

- Parte I: Diagnóstico. En esta parte se presenta una situación problema en un contexto específico y se le formula al estudiante una serie de preguntas para develar sus creencias frente a la situación y a los objetos matemáticos que intervienen.
- Parte II: La experimentación y resolución de preguntas. Se realiza una serie de orientaciones para que los estudiantes tomen datos, realicen el procesamiento de los mismos y resuelvan preguntas.
- Parte III: Socialización e institucionalización. Los estudiantes socializan sus resultados frente a las preguntas realizadas y, al finalizar la socialización, el docente realiza la fase de institucionalización en la que se explican los conceptos matemáticos asociados a la hoja de trabajo que se está implementando.

Validación. Las hojas de trabajo son presentadas al consejo del Departamento de Ciencias Básicas de la UNIAJC para su validación. Se realizan observaciones frente a algunas preguntas y gráficas las cuales son acogidas por el investigador (ver anexo 3).

Recolección. Cada una de las hojas de trabajo se entrega de manera individual a cada estudiante en formato impreso. Están son recolectadas. Todas las preguntas son abiertas, por lo que el investigador las clasifica para su respectivo análisis.

Procesamiento. Para el procesamiento de las respuestas a las diferentes preguntas de cada hoja de trabajo, se realiza una clasificación de las mismas y una descripción porcentual para su respectivo análisis. La tabla 2 muestra la ficha de análisis que se usará para el estudio.

Tabla 2. Rejilla de análisis hojas de trabajo

Partes de la hoja de trabajo	Categorías de análisis
Parte I: • Diagnostico	Sistema de creencias frente: • A la situación plateada • Al concepto de función y sus sistema de representaciones
Parte II: • Experimentación • Toma de datos • Resolución de preguntas	Se observa: • Los recursos que implementan para dar respuesta a las preguntas • Los conocimientos • Las heurísticas que usan
Parte III: • Socialización • institucionalización	Se observan las estrategias metacognitivas

Nota: Se diseña tomando como referencia el marco teórico del proyecto de investigación
Fuente. Elaboración propia

3.3.4. *Fase IV: Prueba final*

Propósito. El propósito fundamental de la prueba final es evaluar el impacto de las tres hojas de trabajo implementadas en la fase IV de este proyecto, respecto a la prueba diagnóstica que se realizó. La información obtenida se analiza cuantitativa y cualitativamente haciendo referencia a las categorías conceptuales de interés.

Diseño. La prueba final se ajusta al mismo formato de la prueba diagnóstica. Esta está conformada por 34 preguntas agrupadas en siete partes (ver anexo 4).

Validación: La prueba final es aprobada junto con la prueba diagnóstica y debe conservar la misma estructura para su comparación.

Recolección. Al igual que la prueba diagnóstica, la prueba final se aplica en formato impreso y se recolectan los formularios para su procesamiento.

Procesamiento. El procesamiento se hace siguiendo la misma metodología de la prueba diagnóstica. Se usa la misma ficha de análisis propuesta en la tabla 1.

De igual manera se compararán los resultados de la prueba diagnóstica con los resultados de la prueba final tomando como referente el análisis de sus medias aplicando la prueba z para muestras grandes ($n > 30$).

Una vez aplicada la prueba final, correspondiente a la fase IV de investigación, se tendrán las calificaciones de los 44 estudiantes antes y después de la implementación de las hojas de trabajo. Estas calificaciones, antes y después, de cada individuo se constituyen en dos muestras independientes.

La prueba z centra sus cálculos en las medias muestrales y usa la hipótesis de que no existe diferencia entre dos medias poblacionales. Para el análisis se tendrá en cuenta la siguiente notación:

- $\bar{x}_1$ Promedio de la muestra 1
- $\bar{x}_2$ Promedio de la muestra 2
- $\bar{s}_1$ Desviación estándar muestra 1
- $\bar{s}_2$ Desviación estándar muestra 2
- n_1 Número de elementos de la muestra 1
- n_2 Número de elementos de la muestra 2

La prueba z utiliza el siguiente estadístico de prueba:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}}$$

Para la aplicación de la prueba de hipótesis asumiremos que:

- Hipótesis nula (H_0): No existe diferencia entre la media de las calificaciones de la prueba diagnóstica con la media de las calificaciones de la prueba final.
- Hipótesis alternativa (H_1): Existe diferencia entre la media de las calificaciones de la prueba diagnóstica con la media de las calificaciones de la prueba final.
- $n = 44$
- Se asume un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$

3.3.5. *Fase V: Encuesta Valorativa*

Propósito. El propósito de la encuesta es valorar la percepción de los estudiantes frente a los instrumentos implementados en la metodología de investigación.

Diseño. La evaluación de la metodología implementada se centra en tres aspectos fundamentales, los cuales deben ser valorados de 1 a 5, donde el 1 representa la valoración más baja y el 5 la valoración más alta (ver anexo 17).

- Primero: Evaluar la metodología implementada en cada instrumento.
- Segundo: Evaluar el uso de la tecnología en las distintas actividades implementadas.
- Tercero: Evaluar el proceso de aprendizaje del concepto de función con situaciones problemas en contexto.

Al finalizar la prueba aparecen dos preguntas abiertas. En la primera se le solicita al estudiante hacer una valoración en cuanto a su disposición frente a todas las actividades implementadas y en la segunda se le solicita que si debe realizar una observación final a toda la metodología la realice.

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1.Introducción

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en cada una de las cinco fases de la metodología propuesta. Se articulan resultados cuantitativos y cualitativos para evaluar el estado actual de los estudiantes, su progreso frente al dominio del concepto de función y el estado final después de haber aplicado la propuesta de intervención en el aula.

El capítulo IV está estructurado de la siguiente manera: En primer lugar, se hace el análisis de la prueba diagnóstica correspondiente a la fase I de la metodología. Posteriormente se presenta una valoración cualitativa de la fase II correspondiente a la capacitación básica en el uso e implementación del software GeoGebra. En tercer lugar, se presentan los resultados cuantitativos y cualitativos de las tres hojas de trabajo que se implementaron en la fase III. En cuarto lugar, se realiza el análisis de la prueba final y un análisis comparativo entre la prueba diagnóstica y la prueba de final de la fase IV el impacto que genera la propuesta, así como la pertinencia de la intervención en el aula y la pertinencia de la incorporación de la tecnología. Finalmente, se presenta el análisis de la prueba valorativa aplicada a los estudiantes.

4.2.Fase I: Análisis de la prueba diagnóstica

En este apartado se describen las características sobresalientes del instrumento diagnóstico por medio del análisis de las respuestas que dan los estudiantes a las diferentes preguntas que se formulan. Además se hace referencia a los aspectos que se pretenden identificar tales como: el conocimiento en cuanto al concepto de función, de dominio, de rango y la identificación de las distintas representaciones semióticas del concepto de función.

4.2.1. *Presentación de la actividad*

La fase I, correspondiente a la prueba diagnóstica, se centra en evaluar el estado actual que los estudiantes tienen sobre el concepto de función, dominio y rango. De igual manera, poner al descubierto algunas creencias alrededor del concepto de función y permitir establecer que tan familiarizados están los estudiantes con las distintas representaciones de dicho concepto.

4.2.1.1.*Condiciones de la aplicación*

La prueba diagnóstica se aplica a un total de 44 estudiantes correspondientes al 12,7% de los estudiantes que ingresaron a primer semestre de la UNIAJC en el periodo académico 2018 - I. Estos estudiantes son seleccionados por conglomerado ya que se toma el grupo 122 de primer semestre de la jornada diurna de los programas tecnológicos correspondientes a la Facultad de Ingenierías.

4.2.2. *Análisis cuantitativo*

En total la prueba diagnóstica está conformada por 34 preguntas. En la figura 9 se presenta el porcentaje de estudiantes que acertó cada pregunta. La pregunta 1 y la pregunta 6 no fueron contestadas por ningún estudiante, razón por la cual no hay barra.

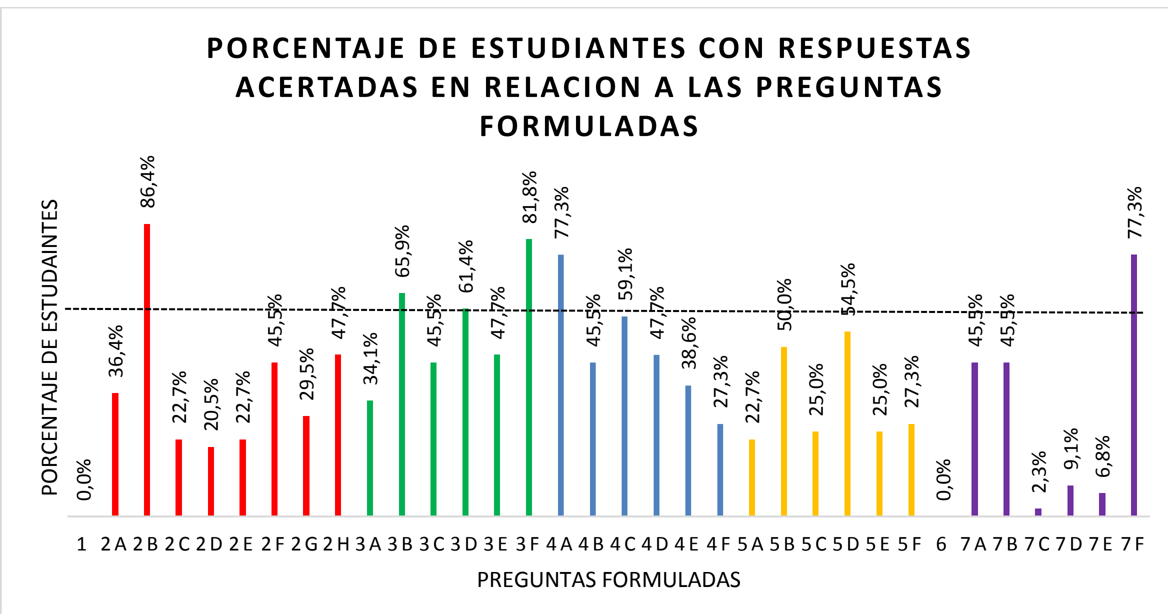


Figura 9. Frecuencia porcentual de los estudiantes que acertaron las preguntas de la prueba diagnóstica. Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Como se observa en el diagrama de barras, el desempeño de los estudiantes en la prueba diagnóstica es bajo, tan solo 6 preguntas (un 16% aproximadamente) de las 34 formuladas fueron contestadas correctamente por un 60% o más de los estudiantes, como aparece en las barras que sobrepasan la línea horizontal punteada de la figura 6.

Para el análisis de la prueba, se ha calificado cada una de las evaluaciones haciendo uso del porcentaje de respuestas acertadas. Esas puntuaciones se han organizado en 10 intervalos de clase para su interpretación. La tabla 3 corresponde a la distribución de frecuencias de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba diagnóstica. En la UNIAJC las calificaciones menores a un 60% se consideran reprobadas.

Tabla 3. Resultados de los estudiantes en la prueba diagnostica

Intervalo de Notas	***f***	***f* %**
[0%-10%)	0	0,0%
[10%-20%)	2	4,5%
[20%-30%)	7	15,9%
[30%-40%)	12	27,3%
[40%-50%)	17	38,6%
[50%-60%)	6	13,6%
[60%-70%)	0	0,0%
[70%-80%)	0	0,0%
[80%-90%)	0	0,0%
[90%-100%]	0	0,0%
Total	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

La figura 10 corresponde al diagrama de barras de la tabla 3 en la que se evidencia el bajo desempeño de los estudiantes en la prueba diagnóstica.

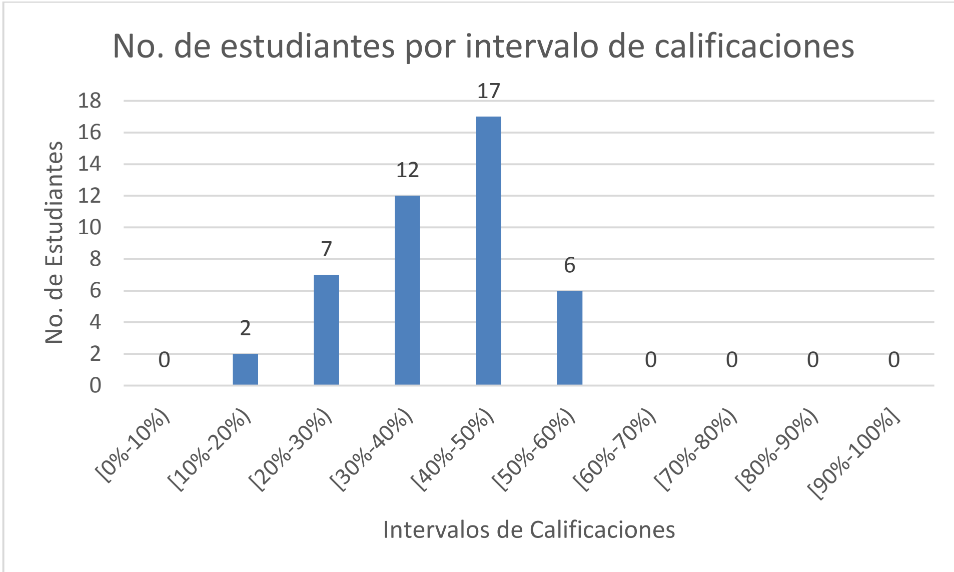


Figura 10. Frecuencia de estudiantes por intervalos de calificaciones
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

A continuación se realiza el análisis por cada una de las partes de la evaluación diagnóstica tomando como referencia aquellas preguntas que develan el sistema de creencias erradas de los estudiantes.

4.2.2.1.*Parte 1 de la prueba diagnóstica: Pregunta abierta*

En la primera pregunta de la prueba diagnóstica se les solicita a los estudiantes que definan el concepto de función matemática con sus propias palabras. Ninguna de las definiciones que dan los 44 estudiantes coincide con una definición formal de función, en otras palabras, las 44 repuestas están erradas. No obstante, sus respuestas sí develan la concepción con la que están más familiarizados y el registró semiótico que asocian al momento de intentar definir dicho concepto.

La tabla 4 muestra una matriz cruzada donde cada celda, m_{ij}, hace referencia al porcentaje de estudiantes cuya respuesta está familiarizada con la definición i, caracterizada por Hitt (2002) con el registro semiótico de la columna j al que el estudiante le da más énfasis en su redacción.

Tabla 4. Matriz de caracterización de las definiciones dadas por los estudiantes del concepto de función.

	Tipo de Representación a la que se asocia la definición de función que da el estudiante						**Total**
Concepción de función	**Textual**	**Numérico**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Esquemático**	**Ninguna representación**	
En términos de variables de dependencia	----	11,4%	2,3%	2,3%	----	----	**15,9%**
En términos de conjuntos	----	6,8%	2,3%	----	----	----	**9,1%**
En términos de reglas de correspondencia	2,3%	----	----	----	----	----	**2,3%**
En términos informáticos o de procesos	2,3%	6,8%	2,3%	4,5%	----	----	**15,9%**
Sin identificar	2,3%	2,3%	9,1%	9,1%	2,3%	----	**25,0%**
No sabe no responde	----	----	----	----	----	31,8%	**31,8%**
Total	**0,0%**	**27,3%**	**15,9%**	**15,9%**	**2,3%**	**38,6%**	**100,0%**

Fuente: Elaboración propia

Al hacer un análisis horizontal de la matriz, se destaca el 31,8% de los estudiantes que manifiesta no saber qué significa una función o dejaron en blanco el espacio correspondiente a la pregunta. Para ilustrar lo anterior se presenta la respuesta que da un estudiante (ver figura 11) donde manifiesta no saber y complementa usando un emoticón triste.

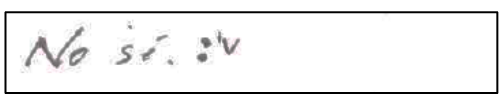


Figura 11. Estudiante 5 – Pregunta 1 – P. Diagnóstica
Fuente. Datos alcanzados en el estudio

De igual manera, se destaca un 25,0% de estudiantes cuya respuesta no se identifica con ninguna de las definiciones que caracteriza Hitt (2002) del concepto de función porque no se detecta ninguna relación con estas o porque son respuestas incoherentes. A manera de ejemplo se presenta una respuesta en la figura 12.

> Es una ~~funcion~~ Metodo que permite demostrar un procedimiento de manera logica y explicar el mecanismo o los pasos ~~que~~

Figura 12. Estudiante 18 – Pregunta 1 – P. Diagnóstica
Fuente. Datos alcanzados en el estudio

Se destaca un 15,9% de los estudiantes que dan respuestas asociadas a la definición de función en términos de relación de variables (ver figura 13) y otro 15,9% cuya redacción se aproxima a una definición en términos de procesos, ver figura 14.

> Una funcion es un metodo matematicos para ayarle solución a un problema tambien entiende que se utiliza para encontrar una variable o un valor desconocido.

Figura 13. Estudiante 32 – Pregunta 1 – P. Diagnóstica
Fuente. Datos alcanzados en el estudio

> considero función a un proceso que tenga como finalidad un resultado con. creto de lo que se busca, dandone, la facilidad de de encontrar la respuesta sin mucna complicaciones

Figura 14. Estudiante 20 – Pregunta 1 – P. Diagnóstica
Fuente. Datos alcanzados en el estudio

Ahora bien, al hacer una revisión vertical de la tabla 4.1, se observa que el registro semiótico más relacionado en las redacciones de los estudiantes, con un 27,3% es el numérico. La figura 15 es un ejemplo de una respuesta donde el estudiante hace alusión exclusivamente a un proceso numérico.

> Un numero que depende de otro

Figura 15. Estudiante 16 – Pregunta 1 – P. Diagnóstica
Fuente. Datos alcanzados en el estudio

4.2.2.2. *Parte 2 de la prueba diagnóstica: identificación de registros gráficos de funciones.*

En la parte 2 de la prueba diagnóstica se presentan 8 registros gráficos de relaciones matemáticas y se les solicita a los estudiantes que indiquen si la representación "es función", "no es función" o "no sabe". De este conjunto de preguntas se destaca la pregunta 2B con un 86,4% de los estudiantes que la acertaron (ver figura 16). De hecho es la pregunta con mayor acierto por parte de los estudiantes en la prueba diagnóstica según la figura 9.

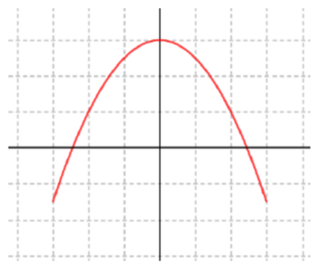


Figura 16. Pregunta 2B de la prueba diagnóstica.
Fuente: Anexo 1

Al revisar los resultados de la pregunta 2A, que muestra una gráfica continua y cerrada se observa que un 52,3% de los estudiantes la identifican como representación gráfica de una función (ver figura 17 y tabla 5).

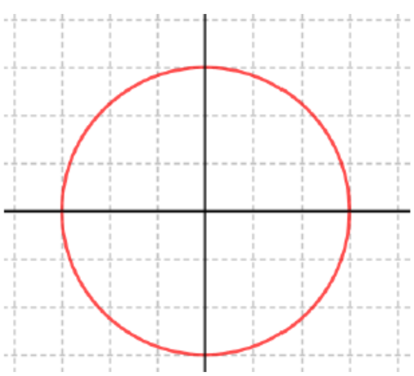


Figura 17. Pregunta 2A de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 5. Distribución de frecuencia pregunta 2A

Opciones	Cuenta de 2A	Porcentaje
Es función	23	52,3%
No es función	16	36,4%
No sé	5	11,4%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Al hacer lo propio con la pregunta 2C, que corresponde a una curva continua y que no representa una relación funcional, se observa que un 63,6% de los estudiantes la caracterizan como una representación de función (ver figura 18 y tabla 6).

Tabla 6. Distribución de frecuencia pregunta 2C

Opciones	Cuenta de 2C	Porcentaje
Es función	28	63,6%
No es función	10	22,7%
No sé	6	13,6%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

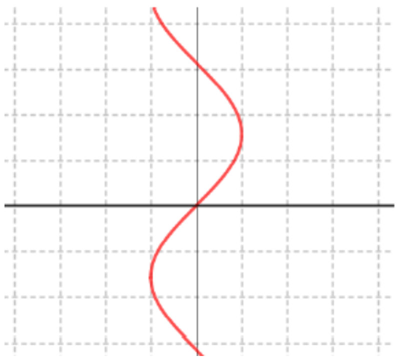


Figura 18. Pregunta 2C de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Hasta este punto, las preguntas 2A, 2B, y 2C, que tienen como característica invariante que corresponden a curvas de trazo continuo, han sido identificadas por la mayoría de los estudiantes como representaciones gráficas de funciones.

Ahora bien, las preguntas 2D y 2E corresponden a representaciones gráficas de funciones con discontinuidad en algunos puntos (ver figura 19 y figura 20). Los estudiantes no las reconocen como representaciones de funciones de acuerdo a la tabla 7 y tabla 8, respectivamente.

Tabla 7. Distribución de frecuencia pregunta 2D

Opciones	Cuenta de 2D	Porcentaje
Es función	9	20,5%
No es función	24	54,5%
No sé	11	25,0%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

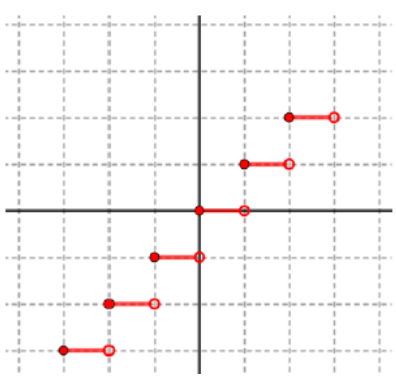
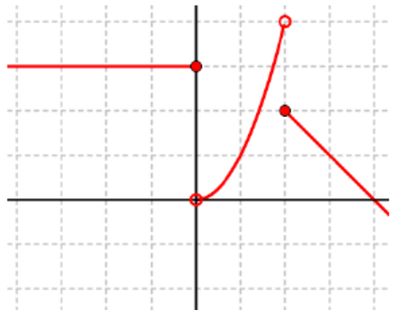


Figura 19. Pregunta 2D de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 8. Distribución de frecuencia pregunta 2E



Opciones	Cuenta de 2E	Porcentaje
Es función	10	22,7%
No es función	22	50,0%
No sé	12	27,3%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Figura 20. Pregunta 2E de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Finalmente, la tabla 9 muestra la distribución de frecuencias y de frecuencias acumuladas. Se observa que un 72,7% de los estudiantes lograron caracterizar correctamente, como función o no, un máximo 3 registros gráficos de los 8 que se presentaron, es decir, contestaron un máximo de 37,5% de la parte 2 de la prueba diagnóstica.

Tabla 9. Distribución de frecuencia absoluta y porcentual de la prueba diagnóstica parte 2

No. de preguntas acertadas de ocho en las representaciones gráficas	n_i	N_i	f_i	F_i
1	4	4	9,1%	9,1%
2	8	12	18,2%	27,3%
3	20	32	45,5%	72,7%
4	6	38	13,6%	86,4%
5	3	41	6,8%	93,2%
6	3	44	6,8%	100,0%
7	0	44	0,0%	100,0%
8	0	44	0,0%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

4.2.2.3. *Parte 3 de la prueba diagnóstica: identificación de registros conjuntistas de funciones*

En la parte 3 de la prueba diagnóstica se le presentan a los estudiantes 6 registros conjuntistas y se les solicita indicar cuáles de esas relaciones representan una función, de igual forma se le pregunta que marquen alguna de las tres opciones: “es función”, “no es función”, “no sé”. Se destaca la pregunta 3F (ver figura 21) como la de mayores aciertos con 81,8% (ver tabla 10) de estudiantes que la identificaron como una representación conjuntista de una función.

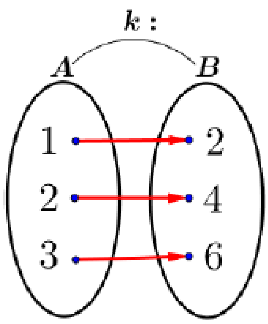


Figura 21. Pregunta 3F de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 10. Distribución de frecuencia pregunta 3F

Opciones	Cuenta de 3F	Porcentaje
Es función	36	81,8%
No es función	5	11,4%
No sé	3	6,8%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

Pero al observar que un 54,5% (ver Tabla 11) de los estudiantes determina que la figura 22 es una representación de una función queda entre dicho que no distinguen las características para que una relación sea función.

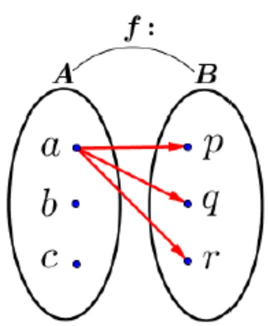


Figura 22. Pregunta 3A de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 11. Distribución de frecuencia pregunta 3A

Opciones	Cuenta de 3A	Porcentaje
Es función	24	54,5%
No es función	15	34,1%
No sé	5	11,4%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

Al hacer un análisis acumulativo del número de preguntas acertadas por parte de los estudiantes respecto a las representaciones conjuntistas, se observa que el 54,5% de los estudiantes lograron contestar como máximo 3 preguntas buenas de las 6. Es decir, un 54,5% contestó como máximo un 50% de las preguntas correctamente (ver tabla 12).

Tabla 12. Distribución de frecuencia absoluta y porcentual de la prueba diagnóstica parte 3

Número de preguntas acertadas de ocho en las representaciones conjuntistas	n_i	N_i	f_i	F_i
0	2	2	4,5%	4,5%
1	1	3	2,3%	6,8%
2	6	9	13,6%	20,5%
3	15	24	34,1%	54,5%
4	11	35	25,0%	79,5%
5	8	43	18,2%	97,7%
6	1	44	2,3%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Elaboración propia

4.2.2.4. *Parte 4 de la prueba diagnóstica: identificación de registros textuales de funciones*

En esta parte 4 de la prueba diagnóstica se les presentan a los estudiantes 6 enunciados y se les solicita indicar cuáles hacen referencia a una relación funcional. Se destaca la pregunta 4A, figura 23, con un 77,3% de los estudiantes que la acierta (ver tabla 13).

El doble de un número dado

Figura 23. Pregunta 4A de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 13. Distribución de frecuencia pregunta 4A

Opciones	Cuenta de 4A	Porcentaje
Es función	34	77,3%
No es función	5	11,4%
No sé	5	11,4%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

Y también se destaca la pregunta 4F que siendo un enunciado que refiere una relación funcional, no es caracterizada así por los estudiantes (ver tabla 14).

Número de letras de una palabra dada

Figura 24. Pregunta 4F de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 14. Distribución de frecuencia pregunta 4F

Opciones	Cuenta de 4F	Porcentaje
Es función	12	27,3%
No es función	23	52,3%
No sé	9	20,5%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

En términos generales, el 63,6% de los estudiantes logró acertar como máximo 3 preguntas correctas de las 6 preguntas planteadas (ver tabla 15).

Tabla 15. Distribución de frecuencia absoluta y porcentual de la prueba diagnóstica parte 4

Número de preguntas acertadas de ocho en las representaciones textuales	n_i	N_i	f_i	F_i
0	2	2	4,5%	4,5%
1	4	6	9,1%	13,6%
2	7	13	15,9%	29,5%
3	15	28	34,1%	63,6%
4	13	41	29,5%	93,2%
5	3	44	6,8%	100,0%
6	0	44	0,0%	100%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Elaboración propia

4.2.2.5. *Parte 5 de la prueba diagnóstica: identificación de representaciones algebraicas de funciones*

En esta parte, se les presenta a los estudiantes 6 representaciones algebraicas y se les solicita caracterizarlos como funciones o no. Al observar la pregunta 5D, figura 25, un 54,5% de los estudiantes contestaron que dicha expresión corresponde a una representación de una función (ver tabla 16), pero al observar los resultados de la pregunta 5E, figura 26, tabla 17, nos damos cuenta que los estudiantes no identifican la representación de la función a trozos o a trazos como una relación funcional.

$$\boxed{h(r) = sen(2r) + \cos(3r)}$$

Figura 25. Pregunta 5D de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Tabla 16. Distribución de frecuencia pregunta 5D

Etiquetas de fila	Cuenta de 5D	Porcentaje
Es función	24	54,5%
No es función	10	22,7%
No sé	10	22,7%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 17. Distribución de frecuencia pregunta 5E

$$g(t) = \begin{cases} 4, \text{ si } t < 0 \\ -t + 2, \text{ si } 0 \leq t < 3 \\ 5t^2 + 1, \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Figura 26. Pregunta 5E de la prueba diagnóstica
Fuente: Anexo 1

Etiquetas de fila	Cuenta de 5E	Porcentaje
Es función	11	25,0%
No es función	16	36,4%
No sé	17	38,6%
Total general	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

En cuanto el análisis acumulativo de las respuestas de los estudiantes a las representaciones algebraicas, el 68,2% contestó como máximo 2 preguntas correctas de las 6 que se formularon, es decir, un 68,2% contestó como máximo el 33,3% de las preguntas correctas (ver tabla 18).

Tabla 18. Distribución de frecuencia absoluta y porcentual de la prueba diagnóstica parte 5

Número de preguntas acertadas de ocho en las representaciones algebraicas	n_i	N_i	f_i	F_i
0	4	4	9,1%	9,1%
1	12	16	27,3%	36,4%
2	14	30	31,8%	68,2%
3	8	38	18,2%	86,4%
4	4	42	9,1%	95,5%
5	2	44	4,5%	100,0%
6	0	44	0,0%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Elaboración propia

4.2.2.6. *Parte 6 de la prueba diagnóstica: preguntas de selección múltiple y única respuesta*

En la parte 6 de la prueba diagnóstica, se les solicita a los estudiantes que definan el concepto de domino y de rango de una función y en su totalidad contestan que no saben o dejan el espacio en blanco.

4.2.2.7. *Parte 7 de la prueba diagnóstica: problema en contexto hipotético con seis preguntas abiertas.*

Se les presenta a los estudiantes una situación en un contexto hipotético en el que se les muestra la relación entre el peso en kg de una persona y la edad en años durante sus 80 años de vida. Se les formulan 6 preguntas abiertas a los estudiantes sobre la gráfica y la relación que se presenta. De esas 6 preguntas, un 63,6% de los estudiantes contestaron acertadamente como máximo 2 preguntas, es decir, 33,3% (ver figura 27) y en general el desempeño es deficiente.

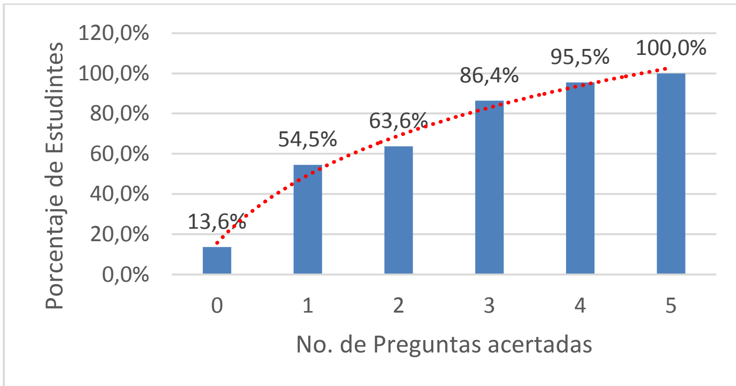


Figura 27.Frecuencia acumulada porcentual de las repuestas acertadas parte 7 prueba diagnostica
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

La pregunta con mayor acierto por parte de los estudiantes es la 7F la cual indica que un 77,3% la contestaron correctamente. Esta pregunta hace referencia a determinar un peso en una determinan edad, es decir, a estimar una imagen de la relación funcional dado un valor del dominio, y la pregunta 7C con un 2,3% de acierto hace referencia a determinar el dominio del función.

4.2.3. *Comentarios finales de la actividad*

Después de haber aplicado la prueba diagnóstica se identifican algunas dificultades y concepciones erróneas que tienen los estudiantes que ingresan a primer semestre en los programas de tecnología de la Facultad de Ingenierías respecto al concepto de función y sus diferentes representaciones. Entre los resultados más sobresalientes se mencionan los siguientes:

a) La totalidad de los estudiantes no logra definir el concepto de función como se observa con la frecuencia porcentual de la pregunta número 1 del anexo 5 y, en términos generales, no identifican las representaciones en diferentes registros. Esto se evidencia en los estadígrafos que se obtuvieron de la prueba diagnóstica como la media de la calificación que corresponde a un 39,2% con una desviación estándar de 11,3% (ver anexo 6).

b) Un 72,7% de los estudiantes logró identificar un máximo de 3 representaciones gráficas de las 8 que se incluían en la prueba, esto se corrobora con el anexo 5.
c) Al observar los resultados de las preguntas 2A, 2B y 2C se identifica como creencia, por parte de los estudiantes, que toda representación gráfica de una función debe ser continua.
d) Aunado a lo anterior, con las preguntas 2D y 2E se observa como creencia que la representación gráfica de una función no puede ser discontinua.
e) No hay claridad, por parte de los estudiantes, de las características que debe cumplir una relación numérica para que represente una función, no identifican la relación entre el conjunto de partida y el conjunto de llegada para que dicha relación sea función. Un 54,4% de los estudiantes logró identificar a 3 de las 6 de las representaciones conjuntistas que se propusieron en la prueba diagnóstica.
f) Un 68,2% de los estudiantes identifica un máximo de 2 de las 6 representaciones algebraicas que se presentaron en la prueba diagnóstica y se destaca que tan solo un 25% logró identificar una función a trozos.
g) En cuanto a las representaciones textuales, un 63,6% identificó un máximo 2 de las 6 representaciones propuestas.
h) A los estudiantes se les dificulta interpretar una representación gráfica de una situación problema en un contexto hipotético, pues un 63,6% de ellos logró dar respuesta a un máximo de 2 de las 6 preguntas formuladas.

Llama la atención, una de las respuestas que da un estudiante cuando se le indica que defina qué es una función. El estudiante realiza una representación esquemática en el que indica que una función es lo que tienen las cosas, por ejemplo, una llave tiene la función de arrojar agua controladamente (Ver figura 28).

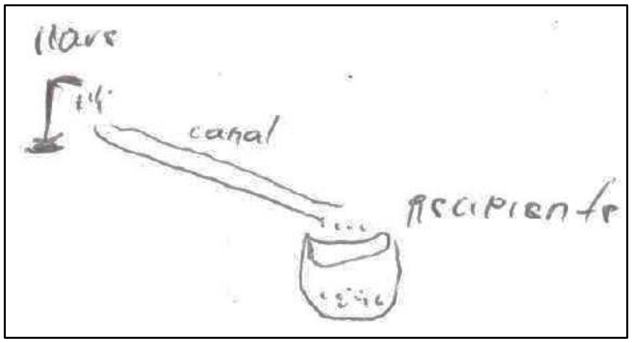


Figura 28. Estudiante 7 – Pregunta 1 – P. Diagnostica
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

4.3.Fase II: Capacitación básica en el uso del GeoGebra

La capacitación básica en el uso e implementación del GeoGebra corresponde a la fase 2 de investigación. En este apartado se describen los resultados significativos de dicha fase, aunado a sus objetivos y su respectivo análisis cualitativo.

Presentación de la actividad

La fase 2 de la metodología de investigación (ver anexo 7) consiste en familiarizar a los estudiantes con el entorno gráfico del GeoGebra, especialmente con las diferentes vistas que contiene el programa y cómo estas se pueden articular para obtener diferentes registros de un mismo objeto matemático.

4.3.1.1.*Condiciones de aplicación*

La capacitación se realiza para la totalidad de los estudiantes de la muestra. Para esto se hace uso de dos aulas de informática de la institución donde cada estudiante, de manera individual, tiene acceso a un computador.

4.3.1.2.*Comentarios finales de la actividad*

Después de haber implementado esta fase de familiarización con el software GeoGebra y con sus diferentes vistas de representación, se observa que:

a. Los estudiantes no habían tenido la oportunidad de haber trabajado antes con dicha aplicación, pues había un desconocimiento completo del software.

b. Hay una aceptación por el uso del software y una gran acogida por parte de los estudiantes.
c. Los estudiantes se familiarizaron con la interface gráfica del programa, en particular con la manera de habilitar la vista que requerían usar.
d. Se destaca la manera como los estudiantes empiezan a representar una situación problema en un contexto numérico, luego en un contexto gráfico y, posteriormente, en un contexto algebraico para dar respuesta a los cuestionamientos que se les hace.

4.4. Fase III: Análisis hojas de trabajo

En este apartado se describen las características de cada una de las tres hojas de trabajo aplicadas, así como los propósitos, condiciones de aplicación y resultados de los análisis cuantitativos y cualitativos correspondientes. Por último, se presentan algunos comentarios finales de cada una de las actividades implementadas.

4.4.1. *Hoja de trabajo No. 1: "Evaporación de un líquido"*

4.4.1.1.*Presentación de la actividad*

En este primer instrumento (ver anexo 8) se plantea una situación relacionada con la evaporación de un líquido a temperatura ambiente. Inicialmente se define, desde el punto de vista físico, qué es la evaporación para pasar a las diferentes partes de la actividad.

Parte I: *Diagnóstico*. Se le formula al estudiante la siguiente pregunta "¿Consideras posible que un líquido, a temperatura ambiente, se pueda evaporar al pasar el tiempo?", y posteriormente se le solicita que proponga dos métodos diferentes para calcular el volumen de un líquido que se evapora al transcurrir el tiempo. De estas dos técnicas el estudiante debe seleccionar la que considere la mejor para ponerla en práctica.

Parte II: La *experimentación*. Se le solicita al estudiante que selecciones el líquido de su preferencia para poner a evaporar en un recipiente. Los estudiantes deben tomar el registro del volumen que va quedando en el recipiente cada 12 horas. Esto durante 5 días. Posteriormente, se le formula una pregunta de estimación en la que se cuestiona por el volumen del recipiente en la hora 51 después de haber iniciado el experimento y se le pregunta por la hora en que desaparecerá el líquido.

A continuación, el estudiante debe registrar sus datos numéricos en la vista hoja de cálculo del GeoGebra para elaborar una lista de puntos en la vista gráfica y hacer uso de la herramienta de regresión para determinar la expresión algebraica que se ajusta al conjunto de puntos registrados. Haciendo uso de esta expresión el estudiante debe dar respuesta a las mismas preguntas de estimación que fueron formuladas anteriormente.

Parte III: Los estudiantes socializan al grupo su experimento indicando la técnica que emplearon para el registro de sus volúmenes. Posterior a esto, llega la fase de institucionalización, donde el docente pregunta por las magnitudes que intervienen, las variables dependiente e independiente, los intervalos en que cambió cada variable, cuántos registros de volúmenes hay por cada instante de tiempo. Y finalmente se introduce el concepto de función, variable dependiente, variable independiente, dominio y rango.

4.4.1.2. ***Propósitos***

Después de aplicar la prueba diagnóstica se evidenció que el grupo no domina los conceptos de función, dominio y rango. Esta situación propició la necesidad de diseñar una actividad de aula que permitiera el aprendizaje de estos conceptos a través de una situación problema en un contexto real y experimental por parte de los estudiantes. De esta manera, el propósito fundamental de esta actividad es contribuir al aprendizaje del concepto de función, de dominio y de rango en un contexto real.

Además de lo anterior, la actividad de aula permite que el estudiante visualice y articule distintas la representaciones (numérica, gráfica y algebraica) de una misma situación, haga uso de sus conocimientos y recursos para afrontar el problema, ponga en evidencia sus sistemas de creencias y lo contraste con resultados obtenidos a través de la metacognición.

4.4.1.3. *Condiciones de aplicación*

Esta primera hoja de trabajo se desarrolla en dos momentos. En el primero, los estudiantes trabajan en sus casas de manera individual el diagnóstico de la actividad y la parte experimental. El segundo momento, correspondiente al procesamiento de los datos, la socialización y la institucionalización se realiza en las salas de cómputo de la institución universitaria.

Cada estudiante toma el líquido de su preferencia para el proceso de evaporación. Todas las preguntas formuladas en la actividad son preguntas abiertas. En el momento de la socialización, los estudiantes exponen sus estrategias y los resultados obtenidos y, fundamentalmente, describen con sus palabras la relación que observan entre el volumen del líquido que seleccionan y el tiempo.

4.4.1.4. *Análisis de resultados*

Como cada hoja de trabajo está conformada por tres partes, se hará un análisis por cada una de ellas describiendo cuantitativamente las respuestas de los estudiantes y cualitativamente el análisis respecto al marco teórico y respecto al propósito de la actividad.

Parte I. Diagnóstico: En cuanto a la parte I de la hoja de trabajo, correspondiente a la fase diagnóstica, se observa que la presentación de la situación problema en un contexto específico activa en los estudiantes sus experiencias y sus sistemas de creencias frente a la situación planteada y frente a su relación con la matemática. En esta primera parte, frente a la pregunta ¿Consideras posible que un líquido a temperatura ambiente se pueda evaporar al pasar el tiempo? Se observaron tres posturas (ver anexo 8). Un 11,4% de los estudiantes no considera la evaporación de un líquido a temperatura ambiente ya que el ambiente no alcanzará el punto de ebullición del líquido de referencia, como ejemplo ver figura 29.

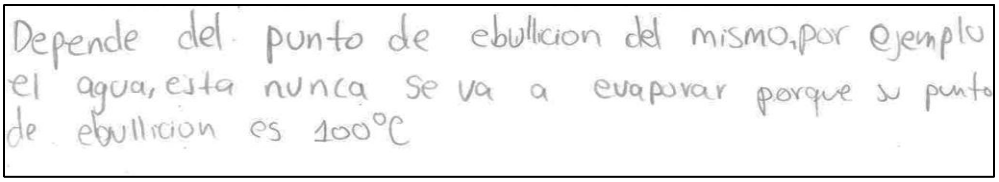

Depende del punto de ebullicion del mismo, por ejemplo
el agua, esta nunca se va a evaporar porque su punto
de ebullicion es 100°C

Figura 29. Estudiante 28 – Pregunta 1 – Hoja de trabaja 1
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Un 15,9% de los estudiantes manifiesta que la evaporación del líquido depende de la temperatura del ambiente, por lo cual puede que haya evaporación o puede que no. Y finalmente, un grupo conformado por un 72,7% manifiesta que sí habrá evaporación como ocurre con las piscinas, el agua de los jarrones o el agua de los floreros. Ver a manera de ejemplo la figura 30.

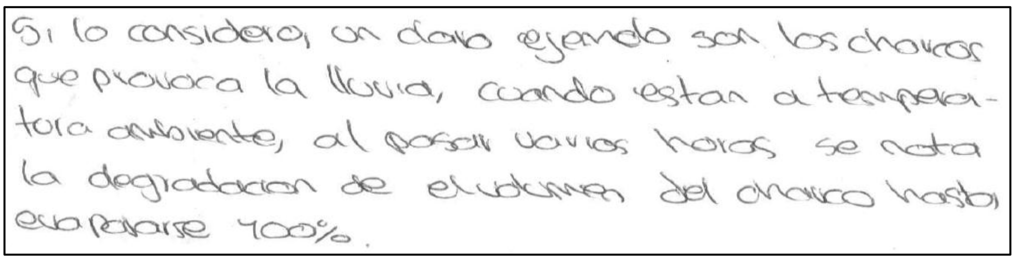

Si lo considero, un claro ejemplo son los charcos
que provoca la lluvia, cuando estan a tempera-
tura ambiente, al pasar varias horas se nota
la degradacion de el volumen del charco hasta
evaporarse 100%.

Figura 30.Estudiante 26 – Pregunta 1 – Hoja de trabajo 1
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Parte II. La experimentación: los estudiantes ponen en juego sus conocimientos sobre cómo medir el volumen de un líquido en un recipiente determinado y develan algunas heurísticas. Por ejemplo un 9,1% de los estudiantes manifiesta que el volumen del líquido se puede determinar calculando el peso del mismo y aplicando la fórmula de la densidad (ver anexo 9). Un 15,9% de los estudiantes dicen que harán uso de fórmulas geométricas del volumen y un 75% de los estudiantes manifiesta hacer uso de recipientes con medidas volumétricas ya establecidas.

Esta reflexión les permite a los estudiantes establecer una primera relación entre las variables que están en juego en la situación planteada, relación que se fortalece cuando se les pide a los estudiantes que registren en una tabla los volúmenes observados de sus respectivos experimentos cada 12 horas. Posterior a este registro los estudiantes deben realizar dos preguntas en las que deben estimar el volumen en un determinado tiempo y estimar el tiempo en el que desaparece el líquido. En ambos casos los estudiantes se apoyan de la tabla numérica para hacer sus cálculos. En el momento de realizar las gráficas, un 90,9% muestra un comportamiento lineal decreciente y el resto corresponde a comportamientos constantes, comportamientos escalonados o simplemente no realizaron la tabla numérica.

Uno de los aspectos que se destaca a partir del anexo 9 es la elaboración de las gráficas, donde se observa que un 61,5% realiza la construcción gráfica de una manera continua, mientras que un 29,5% realiza una gráfica de puntos y no hacen en ella ningún tipo de trazo continuo (ver figura 32).

Repreentacionde la situacion problema usando un trazo continuo. | Representacion de la situacion problema usando puntos

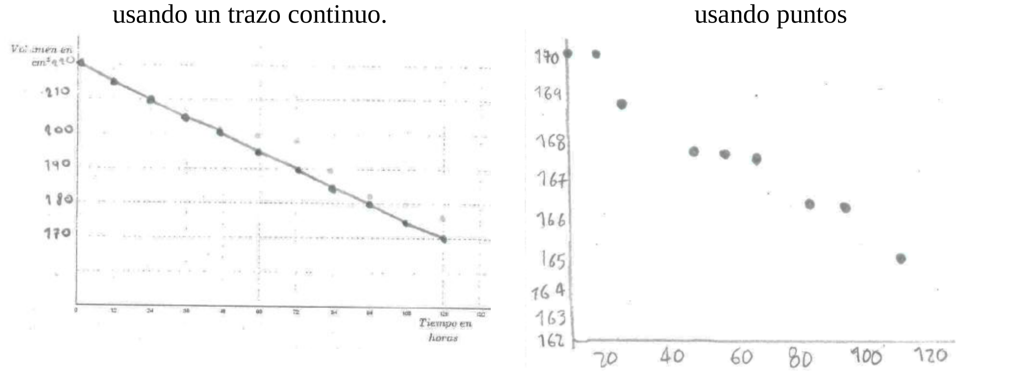


Figura 31. Estudiante 44 – Estudiante 13 – Pregunta 9 – Hoja de trabajo 1
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Posterior a este proceso, los estudiantes hacen uso del GeoGebra para representar sus datos en la vista hoja de cálculo y, a través de las distintas herramientas que ofrece el programa, realizan la representación gráfica de la situación planteada y determinaron la expresión algebraica que se ajusta mejor a estos datos.

En cuanto a la resolución de preguntas, se destaca que los estudiantes logran una comprensión del problema en términos de la relación de las variables y su comportamiento tanto gráfico como numérico. Hacen referencia al dominio y al rango en términos de intervalos numéricos y un 100% de los estudiantes contesta que a cada registro de tiempo le corresponde un único registro de volumen, condición para que una relación sea función.

Parte III. La socialización: los estudiantes muestran una apropiación de la situación problema y una comprensión de la relación que existe desde las diferentes representaciones lo que les permitió participar activamente. **Comentarios finales de la actividad**

En el desarrollo de esta primera hoja de trabajo se obtuvo progresos significativos en cuanto al dominio del concepto de función. Son varios los aspectos a destacar:

- Los estudiantes identifican una relación entre el tiempo transcurrido de estar expuesto un líquido a temperatura ambiente y el volumen del mismo. Como se observa en el anexo 9 un 34,1% manifiesta que a medida que transcurre el tiempo disminuye el volumen del líquido.
- Todos los estudiantes manifestaron que a cada instante de tiempo le corresponde un único volumen.
- Los estudiantes usaron conjuntos numéricos representados por intervalos para hacer referencia al dominio y al rango de la función.
- Desde el uso de la tecnología se observa como los estudiantes logran establecer conexiones entre las representaciones dinámicas que ofrece el software y, a su vez, como una situación de la realidad es llevada al lenguaje matemático.
- Finalmente, se destaca cómo la socialización y comunicación de sus experiencias respecto a la situación problema en contexto real les permite enriquecer sus heurísticas y, en algunos casos, realizar ajustes frente a las creencias que tenían en cuanto a la evaporación de un líquido y su relación con el universo matemático.

4.4.2. *Hoja de trabajo No. 2: "El Parqueadero"*

4.4.2.1. *Presentación de la actividad*

El segundo instrumento (ver anexo 10) plantea una situación problema en un contexto real, relacionada con el costo que se debe pagar por parquear un vehículo durante un tiempo determinado. A continuación se presenta el instrumento refiriéndose a cada una de sus partes.

Parte I: Diagnóstico. Se le formula al estudiante la pregunta "¿Cómo considera la relación entre las variables costo de parqueo de un vehículo y el tiempo de duración del parqueo?". De igual manera se le solicita hacer una representación gráfica de la relación que existe entre las variables que intervienen en dicha situación y se le pregunta si a una fracción de tiempo le corresponde un único valor a pagar. Esta parte se finaliza preguntando si dicha relación es una función o no.

Parte II: La experimentación. Se le presenta al estudiante el siguiente contexto hipotético: *"En un parqueadero de la ciudad de Cali cobran $2500 por cada hora o fracción de hora el estacionamiento de un vehículo"*. A partir de aquí los estudiantes deben elaborar un registro numérico completando una tabla que presenta valores enteros y decimales de tiempo. Haciendo uso de la tabla deben construir una representación gráfica de la relación y contrastarla con la gráfica inicial que habían elaborado en el diagnóstico. Se pregunta por algunas imágenes relacionadas con valores vecinos a un valor que determina una discontinuidad, el costo que debe pagar por 0,99 horas de parqueo, por 1 hora de parqueo y por 1,01 horas de parqueo. También se les solicita a los estudiantes que formulen una ley para calcular el costo por concepto del parqueo haciendo uso de palabras o de expresiones algebraicas.

Finalmente, se les presenta la función $ceil(x)$ del GeoGebra que corresponde a la función parte entera techo y se les pregunta por las modificaciones que deben hacerle para obtener la misma representación que se obtuvo al momento de graficar los puntos.

Parte III: Los estudiantes socializan sus respuestas de manera voluntaria y la manera como usaron la función $ceil(x)$ para ajustarla a los datos obtenidos en el software GeoGebra. El docente introduce el concepto de función parte entera haciendo énfasis en su gráfica y resaltando que existen relaciones discontinuas en uno o más puntos que son funciones.

4.4.2.2. *Propósitos*

En la prueba diagnóstica se logra evidenciar que una de las creencias de los estudiantes es que la representación gráfica de una función debe corresponder con un trazo continuo. Esta situación dio lugar a diseñar una hoja de trabajo en la que los estudiantes experimenten la existencia de funciones discontinuas a partir de un contexto real. El propósito fundamental de esta actividad es contribuir al aprendizaje del concepto de función parte entera y desvirtuar las creencias que las representaciones gráficas de las funciones deben tener un trazo continuo y que los estudiantes contrasten sus creencias con la situación experimentada.

Aunado a lo anterior, se sigue trabajando con el concepto de función, de dominio y de rango, y se amplía el uso de las herramientas del GeoGebra como las funciones pertenecientes a la librería del software.

4.4.2.3. *Condiciones de aplicación*

El desarrollo de esta hoja de trabajo se desarrolla en una sesión en las salas de sistemas de la Institución Universitaria. Para esto se distribuye al grupo de estudiantes en dos salas de cómputo con el respectivo material. La parte diagnóstica se realiza con lápiz y papel en las hojas entregadas, pero en la parte experimental los estudiantes hacen uso del software GeoGebra para realizar los pasos que se les solicita.

4.4.2.4.*Análisis de resultados*

Al igual que la hoja de trabajo No. 1, esta está distribuida en tres partes. Se realizará el análisis cuantitativo de las actividades desarrolladas por los estudiantes y se contrastarán con el propósito de la actividad para ir registrando su desarrollo.

Parte I. Diagnóstico: Se le presenta a los estudiantes una situación real de un estacionamiento y se les pregunta sobre cómo es la relación entre el costo de parquear un vehículo y el tiempo de duración del parqueo. De acuerdo al anexo 10, un 61,4% de los estudiantes contestan que es una relación creciente, pues entre más tiempo se parquea más se paga y 38,6% manifiestan que, además de ser creciente, la relación es lineal, ver imágenes 33 y 34.

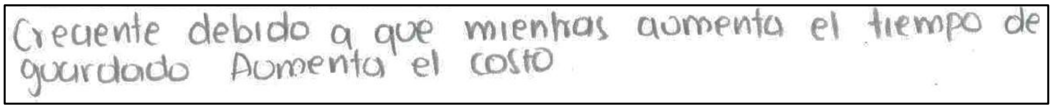


Figura 32. Estudiante 30 – Pregunta 1 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

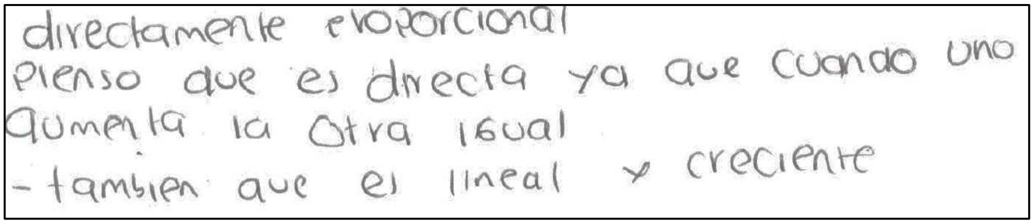


Figura 33. Estudiante 25 – Pregunta 1 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Cuando se les pide a los estudiantes que representen gráficamente esta relación, un 79,6% realiza una representación lineal creciente y un 13,6% realiza una representación de puntos crecientes de manera colineal de dicha relación, ver imagen 32.

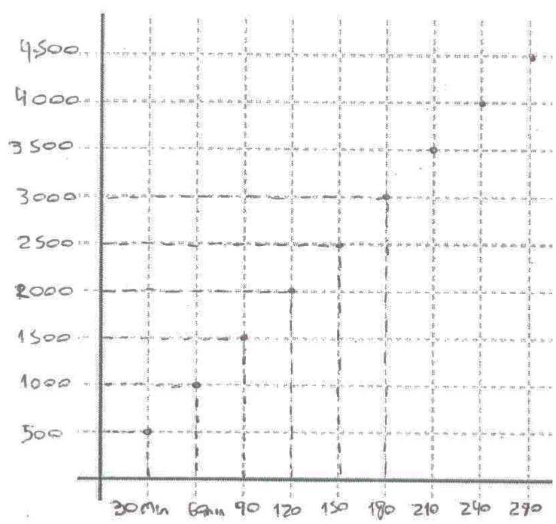


Figura 32. Estudiante 20 – Pregunta 2 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Frente a la pregunta si la relación que se establece entre el costo a pagar y el tiempo es un función, el 100% de los estudiantes manifiesta que sí y una de las razones es que nunca se va a pagar dos veces por un mismo tiempo (ver figura 36).

Si, porque por ejemplo se demora 1 hora solo le pueden cobrar mil pesos, no le pueden cobrar dos o mas precios.

Figura 34. Estudiante 15 – Pregunta 4 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Parte II. Experimentación. A los estudiantes se les indica que el costo de parquear en un estacionamiento privado es de $2500 por hora o fracción y con esta información se les solicita realizar una tabla de valores y posteriormente una gráfica en GeoGebra. De acuerdo al anexo 11, 93,2% de los estudiantes realizan la tabla correctamente respetando las condiciones planteadas en el problema, y en cuanto a la gráfica se obtiene diferentes representaciones. Por un lado, un 54,5% elaboran la gráfica de la relación parte entera con discontinuidad en los múltiplos de 2500, ver figura 37.

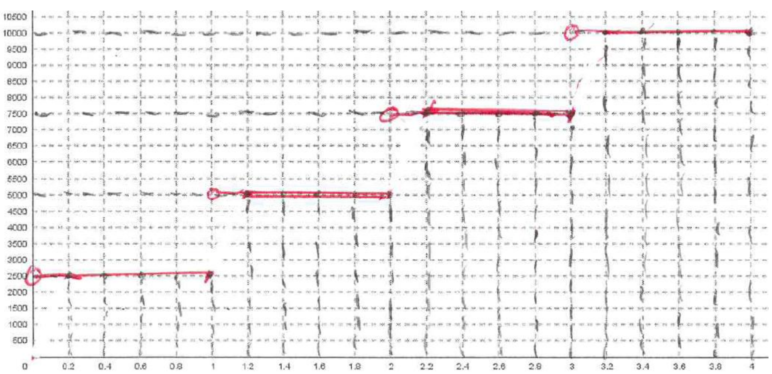


Figura 35. Estudiante 7 – Pregunta 6 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

De otra parte, un 27,2% realiza la gráfica de la relación parte entera estableciendo continuidad entre los peldaños, como se observa en la figura 38.

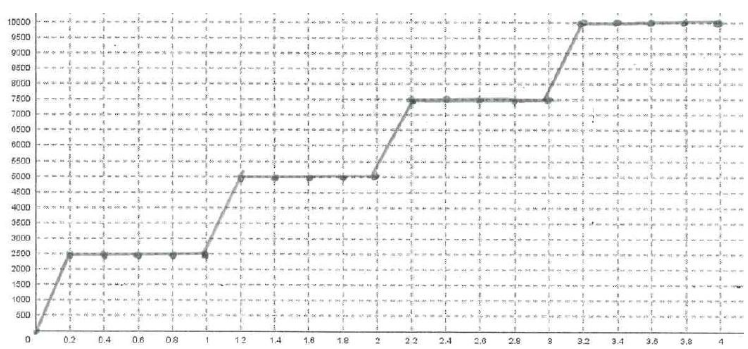
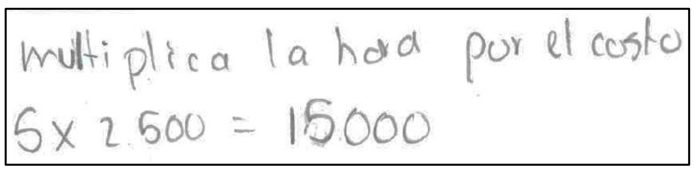


Figura 36. Estudiante 9 – Pregunta 6 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Una vez elaborada la tabla y la gráfica en el software, los estudiantes realizan una comparación entre la gráfica que elaboraron en GeoGebra y la gráfica que habían propuesto inicialmente. En esta comparación los estudiantes usan descripciones usando un lenguaje coloquial para tratar de dar explicación a este nuevo comportamiento. Por ejemplo, un 38,6% de los estudiantes manifiesta que la gráfica elaborada en GeoGebra es “escalerica”, “fracmentada”, “tiene partiduras”, “es por fracciones”, “es segmentada”, “es discontinua” o “es por lapsos” para hacer referencia a su forma. Un 34% de los estudiantes hace referencia a que la gráfica es lineal y creciente.

En cuanto a las preguntas que se formulan, se destaca la manera como los estudiantes intentan redactar una ley que se ajuste a la situación planteada. Un 29,5% dan explicaciones numéricas refiriéndose a un caso puntual como se observa en la figura 39. Un 20,5% centran su redacción de manera textual para explicar el problema, ver imagen 39.

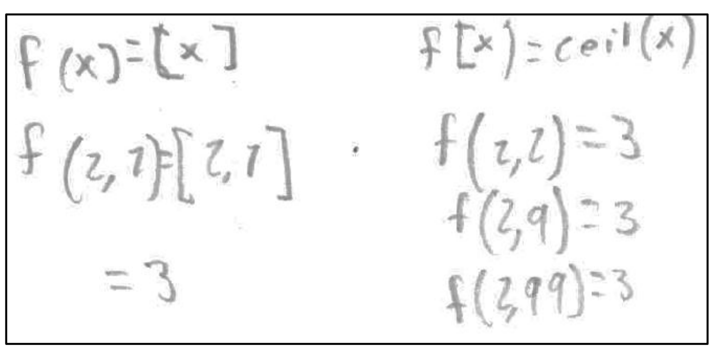


multiplica la hora por el costo

$5 \times 2.500 = 15000$

Figura 37. Estudiante 26 – Pregunta 10 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Pero se destaca un 36,4% de los estudiantes que una vez realizada la socialización de la actividad y la institucionalización, hacen corrección de lo que habían escrito y explican la ley haciendo uso de la función parte entera o la función $ceil(x)$, perteneciente a la librería del software GeoGebra, como se observa en la figura 40.



$f(x) = [x]$

$f(2,1) = [2,1]$

$= 3$

$f[x) = ceil(x)$

$f(2,2) = 3$

$f(2,9) = 3$

$f(2,99) = 3$

Figura 38. Estudiante 13 – Pregunta 10 – Hoja de trabajo 2
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En cuanto a las preguntas se les indica a los estudiantes que exploren la función $ceil(x)$, y que le hagan los ajustes necesarios hasta obtener la representación gráfica ya realizada en el GeoGebra. Por medio de la heurística del ensayo y el error los estudiantes logran determinar que a la función se le debe agregar un factor de 2500 para obtener la gráfica del problema.

Parte III. Socialización e institucionalización: Los estudiantes participan activamente y manifiestan que, entre otras apreciaciones, las funciones les permiten entender la realidad y, de otra parte, manifiestan nunca haber estudiado la función parte entera, lo cual los motiva a estudiar otras representaciones de las funciones diferentes a las estudiadas en el colegio.

4.4.2.5. *Comentarios finales de la actividad*

La creencia que toda representación gráfica de una función debe aludir a un trazo continuo es una de las observaciones realizadas después de haberse implementado la prueba diagnóstica, por esta razón, era necesario confrontar a los estudiantes con una situación que les cuestionara ese conocimiento. A continuación se destacan los aspectos más relevantes de la hoja de trabajo No. 2.

- Un 97,7% de los estudiantes reconocen que hay diferencias entre la gráfica inicialmente elaborada por ellos y la obtenida en el software GeoGebra. En otras palabras, empiezan a identificar las representaciones gráficas de las funciones discontinuas en uno o más puntos.
- Es de destacar el lenguaje coloquial que usan los estudiantes para dar explicación matemática de la situación planteada. Desde sus experiencias culturales empiezan a sentir la necesidad de darle explicación a la discontinuidad, lo que los motiva a usar expresiones como las mencionadas en el anexo 10.
- Se evidencia, en un porcentaje del 27,2% de los estudiantes, la tendencia de darle continuidad a las funciones discontinuas, realizando trazos para unir las partes discontinuas.

- La heurística del ensayo y error surge con fuerza, en el momento de relacionar una expresión algebraica con una representación gráfica de una función ya construida.

4.4.3. *Hoja de trabajo No. 3: "Temperatura del Agua"*

4.4.3.1. *Presentación de la actividad*

En esta tercera y última hoja de trabajo se plantea una situación hipotética relacionada con el calentamiento del agua haciendo uso de un recurso que representa un laboratorio virtual. En este se simula una estufa eléctrica en la que se puede poner a calentar 100, 150 o 200 g de un líquido (entre agua, alcohol y benceno) y se puede registrar la temperatura que alcanza el líquido en diferentes intervalos de tiempo que se registran a través de un cronometro (ver anexo 12). La hoja de trabajo está conformada por tres partes:

Parte I: Diagnóstico. Se le presenta al estudiante una situación hipotética en la que se le dice que en una estufa eléctrica, la cual emite una potencia constante de calor, se coloca un recipiente con un litro de agua a temperatura ambiente y se empieza a registrar la temperatura que va alcanzando el agua en °C, cada 30 segundos. Frente a este contexto se le formulan preguntas abiertas como: cuál es la variable dependiente, cuál es la variable independiente; se le solicita realizar una representación gráfica de la relación que existe entre la temperatura del agua y el tiempo; se le pregunta por el dominio y el rango de la situación planteada y, finalmente, se pregunta por la temperatura máxima que alcanzaría el agua.

Parte II: La experimentación. En esta parte, se le solicita al estudiante que haciendo uso del Apple de Java seleccione una cantidad de 200 g de agua con una temperatura inicial de 0 °C y que active la resistencia a 250 w de potencia y realice registros cada 30 s de la temperatura que alcanza el líquido durante 13 minutos. Después de realizar esta parte, se solicita a los estudiantes que en GeoGebra hagan la representación numérica y gráfica de la situación y traten de encontrar una expresión algebraica que se ajuste a la gráfica obtenida haciendo uso de la herramienta de regresión. También se le solicita al estudiante que compare su gráfica inicial con la obtenida en el software GeoGebra.

Posteriormente, se solicita a los estudiantes que apliquen la herramienta de regresión pero por grupo de puntos según sus imágenes, una regresión para los puntos cuya imagen es 0, una regresión para los puntos que constituyen un crecimiento lineal y una regresión para los puntos cuya imagen es 100. Finalmente, se solicita a los estudiantes que redacten una ley haciendo uso de las tres expresiones algebraicas encontradas anteriormente respetando cada una de sus condiciones.

Parte III: Los estudiantes socializan la solución que encontraron y presentan sus leyes. El docente introduce el concepto de función por partes o a trozos y continúan fortaleciendo los conceptos de dominio y de rango.

4.4.3.2. *Propósitos*

Una de las creencias que se logra develar en la prueba diagnóstica es que la representación algebraica de una función debe cumplir únicamente con una forma polinómica, es decir, ser de grado entero y estar escrita en un solo renglón. Las funciones conformadas por partes no se consideran funciones. El propósito fundamental de esta actividad es contribuir al aprendizaje del concepto de función por partes a partir de una situación en un contexto hipotético simulado en un applet de java.

Adicional a lo anterior, se sigue fortaleciendo el concepto de función, de variables dependiente, variable independiente, de dominio, de rango y las múltiples representaciones de las funciones.

4.4.3.3. *Condiciones de aplicación*

Para esta actividad, los estudiantes trabajan en una sola sesión en las salas de informática. Cada estudiante cuenta con su material de trabajo y tiene acceso a su computador, pero se da la posibilidad de que cada estudiante trabaje y discuta la actividad con los compañeros que tiene a su lado.

4.4.3.4. ***Análisis de resultados***

A continuación se presenta el análisis de la hoja de trabajo No. 3, por cada una de las tres partes que contiene.

Parte I. Diagnóstico: En esta parte se formula a los estudiantes una serie de preguntas sobre la situación planteada relacionada con el calentamiento de un líquido a una temperatura constante. De acuerdo al anexo 12, el 100% de los estudiantes identifican la variable independiente como el tiempo y la variable dependiente como la temperatura del agua.

De otra parte, un 65,9% de los estudiantes manifiesta que al transcurrir el tiempo aumenta la temperatura. En cuanto a la representación gráfica que hacen de la relación un 54.6% la realiza de manera lineal creciente sin detallar alguna variabilidad constante en 100 °C, es decir, no consideran que la temperatura máxima que alcanza el agua sea de 100 °C (ver figura 41).

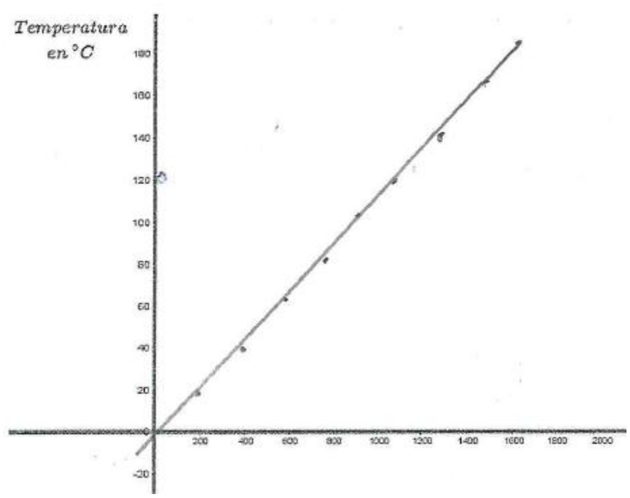


Figura 39. Estudiante 41 – Pregunta 3 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Una de las preguntas que se formula en la fase diagnóstica es si existe la posibilidad de que haya en diferentes intervalos de tiempo una misma temperatura. El 70,5% de los estudiantes no lo considera posible.

Parte II. La experimentación: En esta fase los estudiantes hacen uso del laboratorio virtual y toman los datos para elaborar la gráfica de dicha relación. Un 25% de los estudiantes elabora la gráfica en GeoGebra de manera continua y un 75% realiza la gráfica ubicando solo los puntos.

En cuanto a la resolución de preguntas se les solicita establecer diferencias entre la gráfica inicialmente propuesta y la gráfica elaborada en el GeoGebra. Al respecto, un 65,9% reconoce que hay diferencias y las describen tomando como referente la forma de la gráfica (ver figura 42).

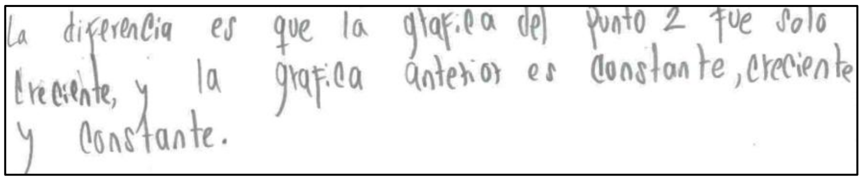

La diferencia es que la grafica del punto 2 fue solo creciente, y la grafica anterior es constante, creciente y constante.

Figura 40. Estudiante 7 – Pregunta 9 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En cuanto al dominio y el rango, un 52,3% de los estudiantes hace referencia al dominio y al rango en términos de conjuntos numéricos usando una descripción por intervalos, y un 47,7% hace referencia al dominio y al rango mencionando las variables que intervienen en esos conjuntos.

Cuando se les solicita a los estudiantes que formulen una ley para la situación planteada, considerando los puntos cuya imagen es cero, los puntos cuya imagen es diferente de cero y de cien, y los puntos cuyas imágenes son equivalentes a cien (ver anexo 13 preguntas 11, 12 y 13) hacen uso de la herramienta de regresión para dos variables del software GeoGebra y deducen la representación algebraica de cada parte (ver figura 43).

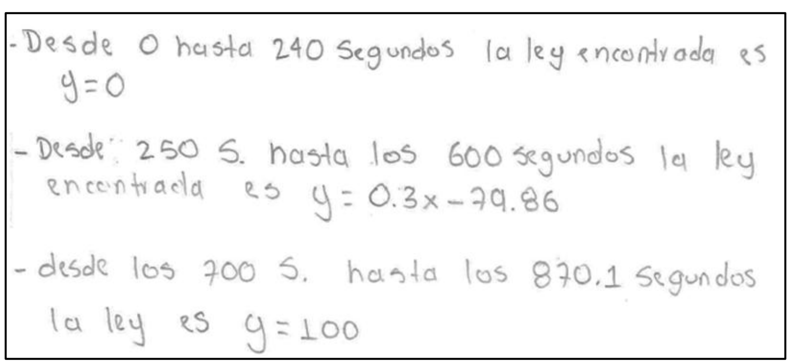

- Desde 0 hasta 240 segundos la ley encontrada es $y=0$
- Desde 250 s. hasta los 600 segundos la ley encontrada es $y=0.3x-79.86$
- desde los 700 s. hasta los 870.1 segundos la ley es $y=100$

Figura 41. Estudiante 26 – Pregunta 14 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Finalmente, los estudiantes elaboran una única ley uniendo las tres representaciones algebraicas elaboradas en los puntos anteriores (ver figura 44).

$$T(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq 240 \\ 0.3t - 79.86, 240 \leq t \leq 600 \\ 100, t \geq 600 \end{cases}$$

Figura 42. Estudiante 17 – Pregunta 14 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Parte III. Socialización e institucionalización:

En la socialización, un estudiante expone la elaboración de la representación algebraica de la situación problema haciendo alusión al comportamiento gráfico obtenido en el GeoGebra y presenta las tres partes con sus respectivas condiciones (ver figura 45).

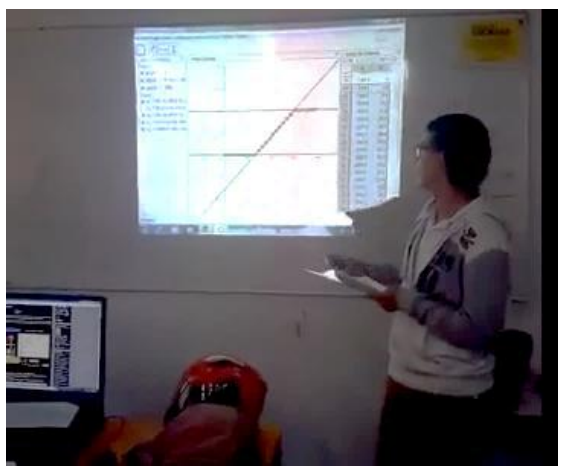


Figura 43. Estudiante 22 – Pregunta 15 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En la institucionalización, se aprovecha la exposición del estudiante para introducir la forma algebraica de las funciones por partes.

4.4.3.5. *Comentarios finales de la actividad*

Entre las observaciones que se destacan de la implementación de esta última hoja de trabajo están:

La situación problema formulada en un contexto hipotético moviliza el sistema de creencias de los estudiantes. Particularmente en esta actividad, los estudiantes entienden que la temperatura del agua depende del tiempo de calentamiento, pero no saben que hay un límite para la temperatura del agua, lo manifiestan tanto en las descripciones de la relación, como en sus representaciones gráficas iniciales. Lo interesante es que posterior a la toma de datos con el simulador, los estudiantes comprenden un poco más el fenómeno y entienden que el agua tiene un punto máximo de calentamiento, que es el punto de ebullición como se observa en la figura 46.

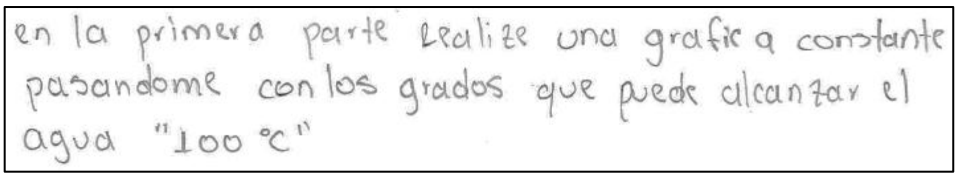

en la primera parte realize una grafica constante pasandome con los grados que puede alcanzar el agua "100 °C"

Figura 44. Estudiante 14 – Pregunta 9 – Hoja de trabajo 3
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En esta actividad se evidencia cómo la mediación instrumental propicia las conexiones entre las diferentes representaciones del fenómeno estudiado. En primer lugar, los estudiantes toman datos en un simulador; en segundo, esos datos son llevados al GeoGebra para representarlos numérica y gráficamente, y en tercero, gracias a la visualización, los estudiantes logran deducir una ley algebraica general para la situación planteada.

4.5. Fase IV: Análisis Prueba final

En esta sección se describen las características esenciales de la prueba final, tomando como referente algunas de las respuestas que dan los estudiantes respecto a las preguntas (ver anexo 14). Se enfatiza en los aspectos que se quieren identificar tales como: el conocimiento en cuanto al concepto de función, de dominio, de rango y la identificación de las distintas representación de dicho concepto.

De igual manera, se presentan los objetivos de la prueba final, las condiciones de aplicación, y posteriormente se realizan los análisis cualitativa y cuantitativamente.

4.5.1. *Presentación de la actividad*

La prueba final se centra en evaluar el estado de salida de los estudiantes, en cuanto al concepto de función, de dominio, de rango y sus representaciones, después de haber finalizado las intervenciones de aula que se realizaron. Con el objetivo de hacer un análisis respecto al aprendizaje de los estudiantes, la prueba se diseña de manera articulada con la prueba inicial para poder analizar los mismos aspectos. Por esta razón, la prueba final cuanta con las mismas 7 partes de la prueba inicial. Estas son:

Parte 1: Conformada por la pregunta No. 1. Pregunta abierta; se le solicita al estudiante definir lo que considera es una función matemática.

Parte 2: Conformada por la pregunta No. 2, la cual contiene 8 ítems numerados del 2A al 2H. Estas preguntas son de selección múltiple donde se le presentan al estudiante registros gráficos los cuales debe identificar con alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".

Parte 3: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 3A al 3F, los cuales presentan registros semióticos conjuntistas en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".

Parte 4: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 4A al 4F, los cuales presentan registros semióticos algebraicos en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".

Parte 5: Esta pregunta contiene 6 ítems enumerados del 5A al 5F, en los cuales se le presentan al estudiante registros semióticos textuales en los que se debe marcar alguna de estas tres opciones: "es función", "no es función" o "no sé".

Parte 6: Se formula una pregunta abierta donde se le solicita al estudiante definir el concepto de dominio y de rango de una función.

Parte 7: se le presenta al estudiante una situación problema el cual contiene un contexto hipotético y a partir de este se le formulan 6 preguntas abiertas (de la 7A a la 7F) en relación a la situación planteada.

4.5.1.1. *Condiciones de la aplicación*

La prueba final se aplica al mismo grupo que participó en la prueba diagnóstica. Se realiza una prueba individual con la misma estructura que la prueba diagnóstica, se cambian las preguntas pero se evalúan los mismos conceptos.

4.5.2. *Análisis cuantitativo*

La prueba final está conformada por 34 preguntas tal y como se realizó la prueba diagnóstica. En la figura 47 se presenta el porcentaje de estudiantes que acertó cada una de ellas.

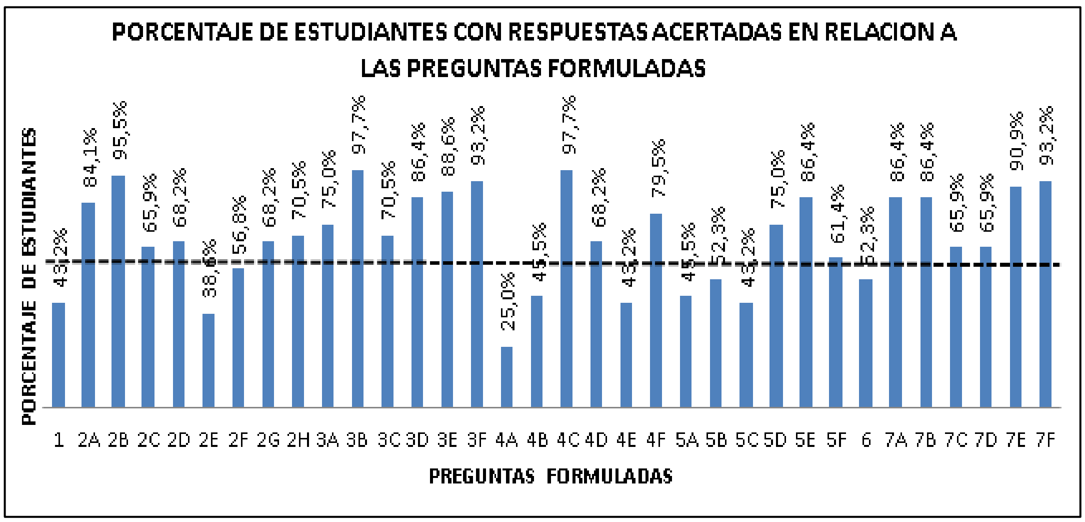


Figura 45. Frecuencia porcentual de los estudiantes que acertaron las preguntas de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Como se observa sobre la línea horizontal punteada de la figura 44, 24 preguntas fueron contestadas correctamente por 60% o más de los estudiantes evaluados, es decir, un 75,6% de la evaluación fue contestado correctamente por un 60% o más de los estudiantes.

Para el análisis de esta prueba se ha calificado cada una de las evaluaciones tomando como referencia el porcentaje que representan las preguntas acertadas, teniendo en cuenta que valoraciones de 60% o más son evaluaciones aprobadas. Los resultados obtenidos por los estudiantes se han organizado en 10 intervalos de clase para su interpretación. En la tabla 19 se presenta una distribución de frecuencia de los datos agrupados.

Tabla 19. Resultados de los estudiantes en la prueba final

Intervalo de notas	***f***	***f%***
[0% - 10%)	0	0,0%
[10% - 20%)	0	0,0%
[20% - 30%)	0	0,0%
[30% - 40%)	1	2,3%
[40% - 50%)	4	9,1%
[50% - 60%)	6	13,6%
[60% - 70%)	10	22,7%
[70% - 80%)	17	38,6%
[80% - 90%)	5	11,4%
[90% - 100%]	1	2,3%
Total	44	100,0%

Fuente: Elaboración propia

La figura 48 muestra un diagrama de barras en la que se puede observar el porcentaje de estudiantes en cada uno de los intervalos de notas. Básicamente se infiere que un 75% de los estudiantes obtiene una calificación con puntajes sobre el 60%, es decir, en términos de la UNIAJC aprobaron la prueba final.

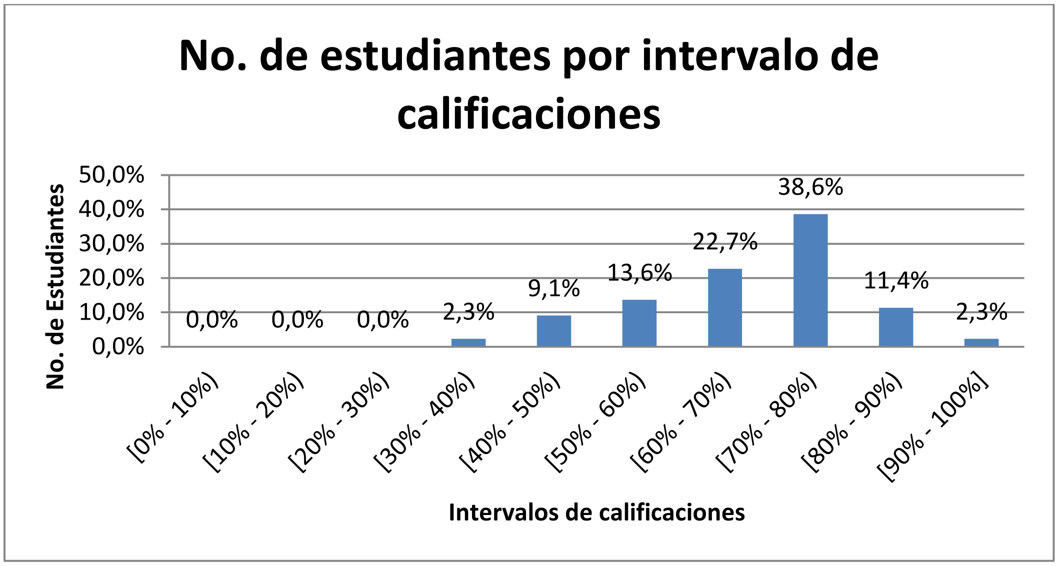


Figura 46. Porcentaje de estudiantes por intervalos de calificaciones
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

A continuación, se realiza el análisis de la prueba final tomando como referencia las preguntas que en la prueba diagnóstica originaron el diseño y la implementación de las tres hojas de trabajo.

4.5.2.1. *Parte 1 de la prueba final: Pregunta abierta*

A diferencia de la prueba diagnóstica, un 43,2% de los estudiantes definió correctamente el concepto de función como se observa en el anexo 14. No era de esperar que un 100% redactara una definición correcta, pues el aprendizaje es un proceso que no se puede delimitar a un número de actividades en particular. Si bien el 100% de las respuestas no fue correcto, se realizó una observación respecto al concepto que presentan los estudiantes y la representación semiótica que utilizan en dicha conceptualización. La tabla 20 muestra una matriz donde cada celda n_{ij} hace referencia al porcentaje de estudiantes cuya respuesta está familiarizada con la definición i, caracterizada por Hitt (2002) con el registro semiótico de la columna j al que el estudiante le da más énfasis en su redacción.

Tabla 20. Matriz de caracterización de las definiciones dadas por los estudiantes del concepto de función.

	Tipo de Representación a la que se asocia la definición de función que da el estudiante						Total
Concepción de función	**Textual**	**Numérico**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Esquemático**	**Ninguna representación**	
En términos de variables de dependencia	9,1%	----	9,1%	4,5%	----	----	**22,7%**
En términos de conjuntos	18,2%	40,9%	----	9,1%	----	----	**68,2%**
En términos de reglas de correspondencia	----	----	----	----	----	----	----
En términos informáticos o de procesos	----	4,5%	----	2,3%	----	----	**6,8%**
Sin identificar	----	----	----	----	----	2,3%	**2,3%**
No sabe no responde	----	----	----	----	----	----	----
Total	**27,3%**	**45.4%**	**9.1%**	**15.9%**	**0.0%**	**2.3%**	**100%**

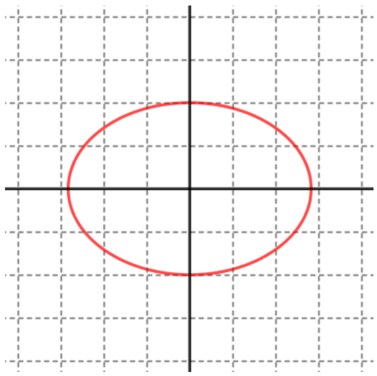
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Como se observa en la celda n_{22}, un 40,9% de los estudiantes centran su definición en una concepción conjuntista haciendo referencia a registros numéricos como casos puntuales. También es de destacar en la celda n_{21} que un 18,2% centra su definición en términos conjuntistas pero haciendo énfasis solo en el registro textual de la función.

Parte 2 de la prueba final: identificación de registros gráficos de funciones.

Al igual que en la prueba diagnóstica, se presentaron 8 representaciones gráficas de relaciones las cuales debían ser clasificadas entre representaciones gráficas de funciones o no. Después de realizar la prueba final, se observa que la figura conformada por un trazo cerrado y continuo, ver figura 49, no es identificada como una representación gráfica de una función por un 84,1%, ver tabla 21.

Tabla 21. Tabla de frecuencia pregunta 2A



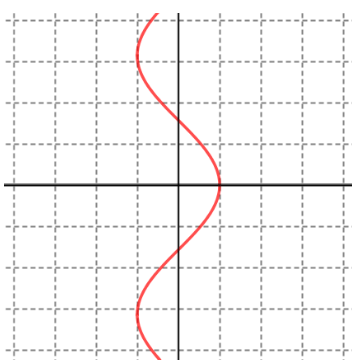
Opciones	Cuenta de 2A	Porcentaje
Es función	7	15,9%
No es función	**37**	**84,1%**
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Figura 47. Pregunta 2A de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Al observar las figuras 50 y 51, que corresponden a trazos continuos pero no cerrados y cuyas gráficas no representan funciones, se advierte en las tablas 22 y 23 respectivamente, que más de la mitad de los estudiantes identifica correctamente estas representaciones.

Tabla 22. Tabla de frecuencia pregunta 2C



Opciones	Cuenta de 2C	Porcentaje
Es función	13	29,5%
No es función	29	65,9%
No se	2	4,5%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Figura 48. Pregunta 2C de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Tabla 23.Tabla de frecuencia pregunta 2F

Opciones	Cuenta de 2F	Porcentaje
Es función	16	36,4%
No es función	25	56,8%
No se	3	6,8%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

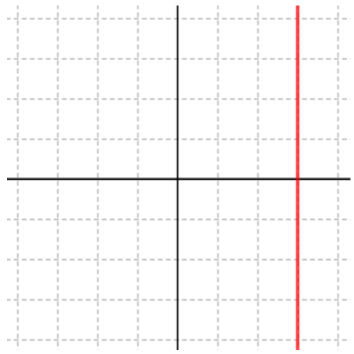


Figura 49 Pregunta 2F de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En cuanto a las representaciones de funciones discontinuas como las de la figura 52 y figura 54, se observa que más de un 68,2% la identifica como una función. Pero, curiosamente, figura 53 no la identifican como una función.

Tabla 24. Tabla de frecuencia pregunta 2D

Opciones	Cuenta de 2D	Porcentaje
Es función	30	68,2%
No es función	14	31,8%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

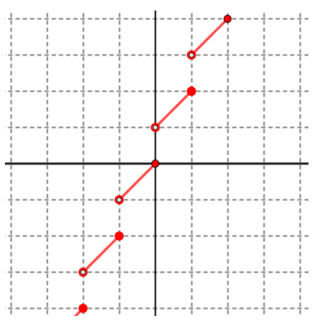


Figura 50. Pregunta 2D de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Tabla 25. Tabla de frecuencia pregunta 2E

Opciones	Cuenta de 2E	Porcentaje
Es función	17	38,6%
No es función	27	61,4%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

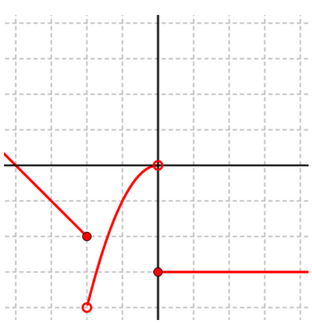
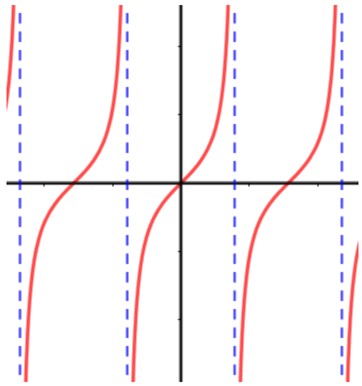


Figura 51. Pregunta 2E de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Tabla 26. Tabla de frecuencia pregunta 2H



Opciones	Cuenta de 2H	Porcentaje
Es función	31	70,5%
No es función	10	22,7%
No se	3	6,8%
Total general	44	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Figura 52. Pregunta 2H de la prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

En términos generales se observa que un 70,5% de los estudiantes lograron identificar correctamente 5 o más representaciones gráficas de las 8 que se les presentaron.

Tabla 27. Tabla de frecuencias acumulada de la parte 2 prueba final

No. de preguntas acertadas de ocho en las representaciones gráficas	n_i	N_i	f_i	F_i
0	1	1	2,3%	2,3%
1	1	2	2,3%	4,5%
2	2	4	4,5%	9,1%
3	3	7	6,8%	15,9%
4	6	13	13,6%	29,5%
5	5	18	11,4%	40,9%
6	12	30	27,3%	68,2%
7	6	36	13,6%	81,8%
8	8	44	18,2%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

4.5.2.2. *Parte 3 de la prueba final: identificación de registros conjuntistas de funciones*

En cuanto a la parte 3, en la que se presentaron 6 relaciones entre conjuntos y los estudiantes debían identificar cuáles son relaciones y cuales son funciones, un 86,4% de los estudiantes logró identificar 4 o más de dichas representaciones correctamente como se observa en la tabla 28.

Tabla 28. Tabla de frecuencias acumulada de la parte 3 prueba final

No. de preguntas acertadas de 6 en las representaciones conjuntista	n_i	N_i	f_i	F_i
0	0	0	0,0%	0,0%
1	0	0	0,0%	0,0%
2	2	2	4,5%	4,5%
3	4	6	9,1%	13,6%
4	5	11	11,4%	25,0%
5	9	20	20,5%	45,5%
6	24	44	54,5%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

De igual manera, se observa en el anexo 14 que las 6 representaciones conjuntistas fueron identificadas correctamente por más del 70% de la muestra.

4.5.2.3. *Parte 4 de la prueba final: identificación de registros textuales de funciones*

En cuanto a las 6 representaciones textuales, se destacan las respuestas de los estudiantes a la pregunta 4C y la pregunta 4F del anexo 14, que corresponde a textos que refieren a una relación funcional en contextos realistas e hipotéticos respectivamente, que fueron identificados correctamente por más del 79% de los estudiantes.

De igual manera, se destaca que un 77,3% de los estudiantes identificó acertadamente 3 o más de los enunciados presentados como se observa en la tabla 29.

Tabla 29. Tabla de frecuencias acumulada de la parte 4 prueba final

No. de preguntas acertadas de 6 en las representaciones textual	n_i	N_i	f_i	F_i
0	0	0	0,0%	0,0%
1	1	1	2,3%	2,3%
2	9	10	20,5%	22,7%
3	9	19	20,5%	43,2%
4	15	34	34,1%	77,3%
5	8	42	18,2%	95,5%
6	2	44	4,5%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

4.5.2.4. *Parte 5 de la prueba final: identificación de representaciones algebraicas de funciones*

De acuerdo al anexo 13, se observa que las preguntas 5D y 5E son identificadas correctamente por 75% y 86,4% respectivamente. Sin embargo, la pregunta 5B, que corresponde a una ecuación lineal, no es identificada por los estudiantes como una función lineal, pues tan solo un 52,3% de los estudiantes la marcaron como función.

Tabla 30. Tabla de frecuencias acumulada de la parte 4 prueba final

No. de preguntas acertadas de 6 en las representaciones Algebraica	n_i	N_i	f_i	F_i
0	0	0	0,0%	0,0%
1	4	4	9,1%	9,1%
2	4	8	9,1%	18,2%
3	9	17	20,5%	38,6%
4	17	34	38,6%	77,3%
5	7	41	15,9%	93,2%
6	3	44	6,8%	100,0%
Total general	44		100,0%	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

4.5.2.5. *Parte 6 de la prueba final: preguntas de selección múltiple y única respuesta*

La parte 6 de la prueba final corresponde a una pregunta abierta en la que se les dice a los estudiantes que definan lo que es el dominio y el rango de una función. A diferencia de la prueba diagnóstica, un 52,3% de los estudiantes, logran definir correctamente estos términos.

4.5.2.6. *Parte 7 de la prueba diagnóstica: problema en contexto hipotético con seis preguntas abiertas.*

De acuerdo al anexo 14, las seis preguntas que hacen referencia a una representación gráfica de una función referida a un contexto hipotético, fueron contestadas por más del 65% de los estudiantes de manera correcta.

4.5.3. *Comentarios finales de la actividad*

La aplicación de la encuesta de salida permitió, entre otras cosas, obtener la información necesaria para determinar la pertinencia de las hojas de trabajo implementadas en cuanto al aprendizaje del concepto de función. A continuación se mencionan los principales resultados alcanzados:

a) Aunque tan solo un 43,2% de los estudiantes logra definir el concepto de función como se observa en el anexo 15 pregunta 1, hay un dominio del concepto de función en cuanto a las representaciones de dicho concepto. Esto se logra evidenciar con los estadígrafos como la media de los resultados obtenidos por los estudiantes, que corresponde a un 68,2% con una desviación estándar de 13,0%
b) Un 70,5% de los estudiantes logra identificar correctamente 5 o más representaciones gráficas de las 8 que se presentan.
c) Los estudiantes ya no identifican como función las curvas continuas cerradas, como la de la pregunta 2A.
d) Se destaca que los estudiantes ya logran identificar representaciones gráficas de funciones discontinuas como funciones.
e) Sobresale que más del 60% de los estudiantes logran identificar correctamente las representaciones conjuntistas de las funciones.
f) Las representaciones de funciones a trozos ya son identificadas por los estudiantes como funciones. Esto se observa con el 86,4% que acertó la pregunta 5E.
g) Se destaca que los estudiantes identifican como relaciones funcionales los enunciados textuales que refieren a contextos reales o hipotéticos esto se observa con la pregunta 4C y 4F.
h) Finalmente, se destaca como los estudiantes logran identificar una situación problema que refiere una representación y dar respuestas acertadas a las preguntas que se formulan.

4.5.4. *Estudio comparativo entre la prueba diagnóstica y la prueba final*

A continuación se presenta un estudio comparativo entre la prueba diagnóstica y la prueba final, con el objetivo de evaluar el impacto de las actividades implementadas en la intervención de aula y así determinar el nivel de apropiación del concepto de función, dominio y rango en los estudiantes que participaron en la investigación.

La tabla 30 muestra los resultados cuantitativos más relevantes de ambas pruebas respecto a cada una de las partes que se evaluaron.

Tabla 31. Tabla comparativa entre la prueba diagnóstica y la prueba final

Prueba Diagnóstica	**Prueba final**
• El promedio de las calificaciones fue 39.2% • Ningún estudiante definió el concepto de función • El 72.7% de los estudiantes identificó correctamente como máximo 3 de las 8 representaciones gráficas presentadas • El 54.5% logró identificar como máximo 3 de las 6 representaciones conjuntistas • El 63.6% de los estudiantes logró identificar como máximo 3 de los 6 enunciados que se presentaron • El 68.2% identificó como función o no máximo 2 de las 6 representaciones algebraicas. • Ninguno de los estudiantes definió el concepto de dominio o rango de una función • El 63.6% de los estudiantes contestó correctamente 2 de las 6 preguntas asociadas a una situación problema en contexto.	• El promedio de las calificaciones fue 68.2% • 43.2% definió correctamente el concepto de función • El 70.5% identificó correctamente 5 o más de las representaciones gráficas entregadas. • El 75% identificó correctamente 5 o más de las 6 representaciones conjuntistas entregadas. • El 56.8% de los estudiantes identificó 4 o más de los enunciados como función o no. • El 61.3% identificó como función o no 4 o más de las 6 representaciones algebraicas • El 52.3% define correctamente el concepto de función y de dominio de una función en términos conjuntistas. • 65% contestó correctamente las 6 preguntas correspondientes al contexto hipotético planteado.

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

De otra parte, la tabla 32 muestra las frecuencias porcentuales de los estudiantes en los intervalos de notas, tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba final. En esta se observa que hay una distribución mayor de las notas en los intervalos finales de la prueba final.

Tabla 32. Tabla comparativa entre los resultados de la prueba diagnóstica y la prueba final

	Porcentaje de estudiantes en cada intervalo de notas	
Intervalo de Notas	Prueba Diagnostica	Prueba Final
[0%-10%)	0,0%	0,0%
[10%-20%)	4,5%	0,0%
[20%-30%)	15,9%	0,0%
[30%-40%)	27,3%	2,3%
[40%-50%)	38,6%	9,1%
[50%-60%)	13,6%	13,6%
[60%-70%)	0,0%	22,7%
[70%-80%)	0,0%	38,6%
[80%-90%)	0,0%	11,4%
[90%-100%]	0,0%	2,3%
Total	100,0%	100,0%

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

La figura 55 muestra los diagramas de barras de los resultados tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba final. En este diagrama se logra visualizar una distribución favorable en la prueba final respecto a la prueba diagnóstica, lo cual se evidencia en los estadígrafos que aparecen en la tabla 32.

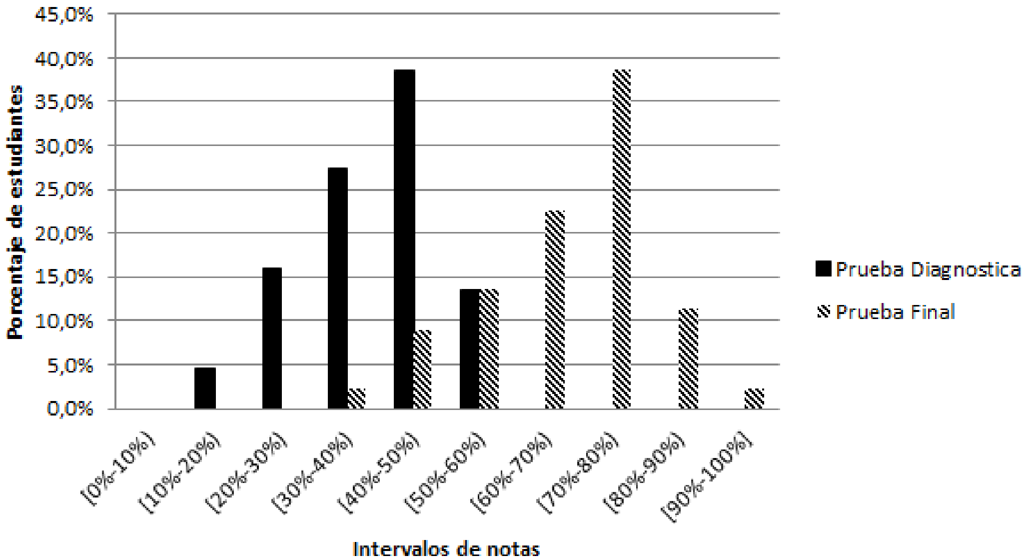


Figura 53. Porcentaje de estudiantes por intervalos de calificaciones
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Tabla 33. Tabla comparativa entre los estadígrafos de la prueba diagnóstica y la prueba final

Estadígrafos	**Prueba Diagnostica**	**Prueba Final**
Media	39,2%	68,2%
Desviación Estándar	11,3%	13,0%
Rango	32	19
Coeficiente de variación	0,29	0,19

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

De otra parte, se observa que la media de la prueba final tiene un incremento de 29 puntos respecto a la media de la prueba diagnóstica. Aunque se presenta más dispersión en los resultados de la prueba final, el coeficiente de variación es más pequeño, es decir, el nivel de variabilidad de los datos es menor respecto a la prueba diagnóstica. Lo anterior se puede visualizar observando la figura 56, donde el diagrama de caja y alambre de los resultados de la prueba final está desplazado hacia la derecha respecto al diagrama de caja y alambre de los resultados de la prueba diagnóstica.

Mientras que el 100% de las calificaciones de los estudiantes en la prueba diagnóstica estuvieron por debajo del 60%, menos del 25% de las notas de la prueba final estuvo por debajo del 60% en la prueba final, esto se observa en el primer cuartil del diagrama de caja de alambre de la prueba final.

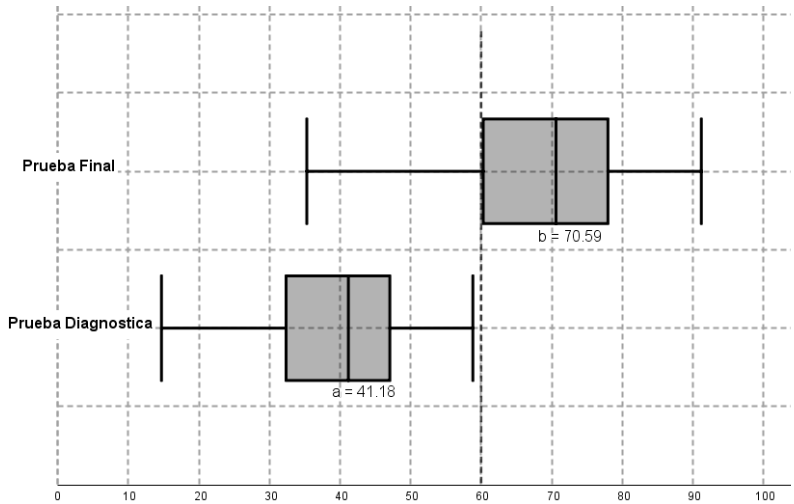


Figura 54. Comparación distribución por cuartiles prueba diagnóstica y prueba final
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

Tomando los resultados de la prueba diagnóstica y de la prueba final (anexo 16), se procedió a aplicar la prueba *z* para medias de dos muestras mediante el uso del software Excel. Este procedimiento arrojó la tabla 34, en la que se puede inferir que:

Tabla 34. Prueba z para medias de dos muestras

	Variable 1	*Variable 2*
Media	39,23796791	68,17727273
Varianza (conocida)	127,1	168,1
Observaciones	44	44
Diferencia hipotética de las medias	0	
z	-11,17265159	
P(Z<=z) una cola	0	
Valor crítico de z (una cola)	1,644853627	
Valor crítico de z (dos colas)	0	
Valor crítico de z (dos colas)	1,959963985	

Fuente: Datos alcanzados en el estudio

- Como el estadístico $z = -11{,}172$ y es menor que su valor crítico -1,96, entonces z está ubicado en la zona de rechazo de la hipótesis nula (ver figura 55). Por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula H_0 que se plateó en el capítulo III y se acepta la hipótesis alternativa H_1 con una significancia al 5%

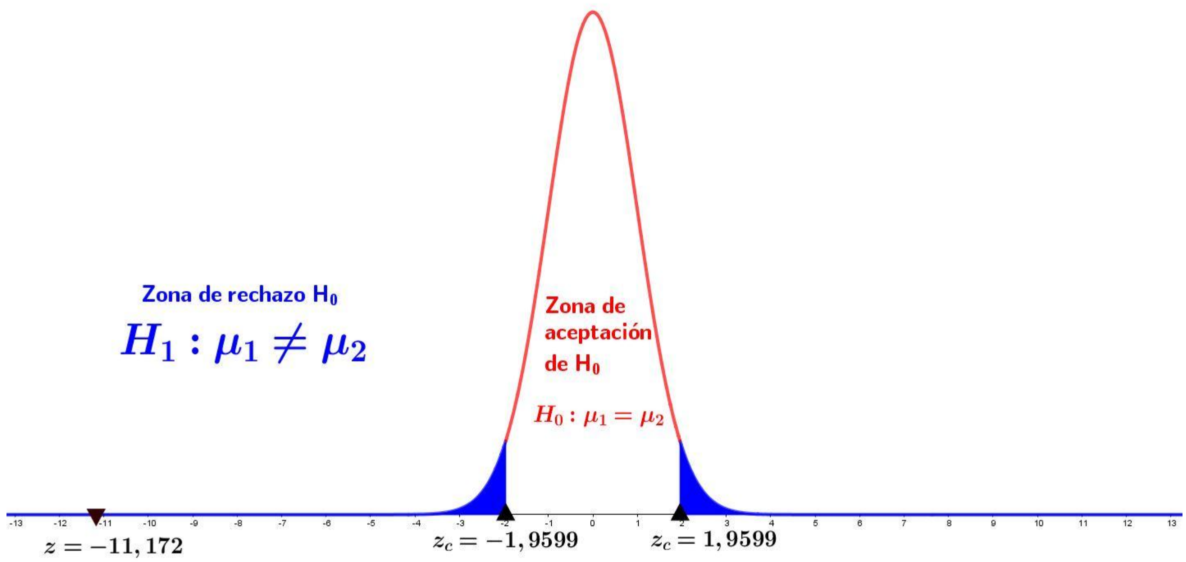


Figura 55: Prueba de hipótesis z para dos medias
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

- En el contexto estadístico, podríamos conjeturar que sí hay un cambio significativo en la medias de las prueba final respecto a la prueba diagnóstica.
- En el contexto de la investigación, podríamos conjeturar que las hojas de trabajo implementadas a los estudiantes, generaron diferencias favorables respecto a los resultados de la prueba diagnóstica.

4.6. Fase V. Encuesta valorativa

En esta sección se describen los resultados de la prueba valorativa que se aplicó a los estudiantes participantes en la propuesta de aula implementada (ver anexo 18).

4.6.1. Análisis de la actividad

La encuesta valorativa se dividió en 4 partes. A continuación se realizará una descripción de los resultados que se obtuvieron en cada una de ellas.

- *Metodología de trabajo*. Esta categoría tenía el propósito de evaluar la metodología implementada en la investigación, en cada uno de los estudiantes y por cada uno de los instrumentos. En términos generales, se observa que hubo una valoración positiva ya que tanto en la prueba diagnóstica, la capacitación en GeoGebra, las hojas de trabajo y la prueba final, el 80% de los estudiantes la califican con 4 o más puntos de 5. Se evidencia en el anexo 18, que el nivel de valoración propiamente en las tres hojas de trabajo fue aumentando, progresivamente; estas valoraciones fueron 48,84%, 61,36% y 72,73% respectivamente.
- *Uso de tecnología*. El propósito de esta categoría, era evaluar la valoración que dan los estudiantes al uso e incorporación de TIC en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Se observa que un 94% de los estudiantes valoran con un 4 o más puntos de 5 dicha incorporación.
- *Estudio del concepto de función*. En esta categoría se valoró, desde la perspectiva de los estudiantes, el proceso de enseñanza del concepto de función de acuerdo a la metodología implementada, es decir, desde la resolución de problemas en contexto. Se logra observar que más del 95% de los estudiantes valoran con 4 o más puntos esta categoría.

  De otra parte, en los dos últimos ítems de esta categoría, se pidió a los estudiantes que valoraran su actitud y nivel de aprendizaje alcanzado en las diferentes fases de la investigación. En términos generales, un 83% de los estudiantes se valora con 4 puntos o más respecto a la valoración mayor, que es 5.

4.6.2. Comentarios finales de la actividad

Esta fase, además de describir la valoración de los estudiantes en cuanto a la metodología, a la implementación de las TIC y el estudio del concepto de función, tenía como propósito adicional capturar algunas descripciones de los estudiantes frente a todo este proceso. Para esto, se le formuló una pregunta abierta a los estudiantes en cuanto a si escogerían una metodología de enseñanza de las matemáticas basada en situaciones problema en contexto. Frente a sus respuestas se observó lo siguiente:

- Estudiantes que reclaman asignaturas contextualizadas a la formación profesional que reciben. La figura 55 es una muestra de este tipo de respuestas.

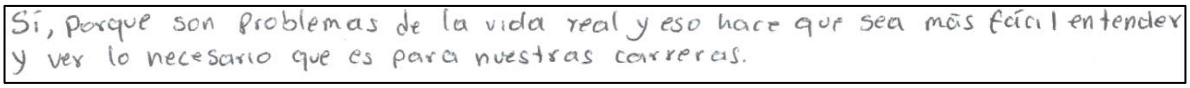

Sí, porque son problemas de la vida real y eso hace que sea más fácil entender y ver lo necesario que es para nuestras carreras.

Figura 56. Estudiante 36 – Pregunta final – Prueba valorativa
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

- Estudiantes que además de reconocer la potencialidad de la enseñanza centrada en el enfoque de resolución de problemas, resaltan el uso de la tecnología como un valor que agrega significado al proceso de enseñanza. La figura 56 es una muestra de esas respuestas.

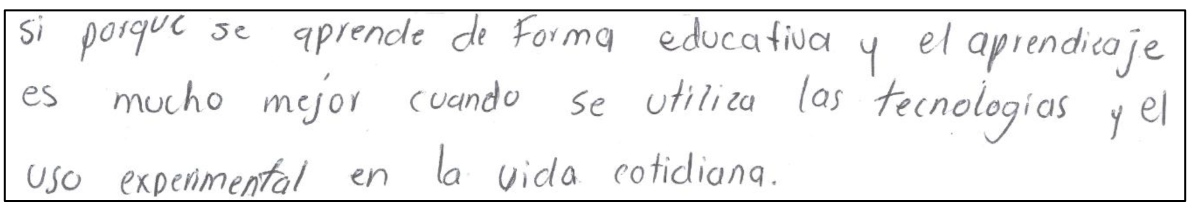

si porque se aprende de forma educativa y el aprendicaje es mucho mejor cuando se utiliza las tecnologías y el uso experimental en la vida cotidiana.

Figura 57. Estudiante 12 – Pregunta final – Prueba valorativa
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

- Estudiantes que reconocen en la enseñanza basada en problemas un proceso que les permite acceder de una manera más comprensible a los objetos matemáticos. La figura 57 es una muestra de este grupo de respuestas.

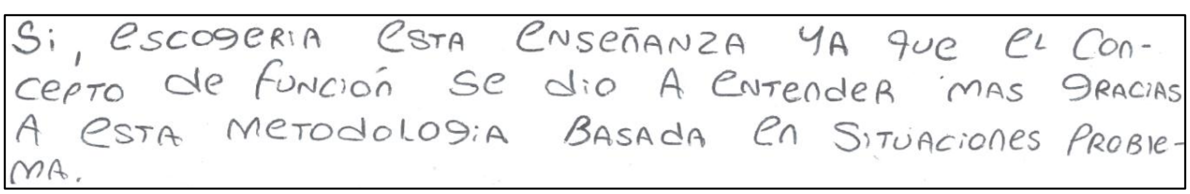

Si, escogeria esta enseñanza ya que el concepto de función se dio a entender mas gracias a esta metodologia basada en situaciones problema.

Figura 58. Estudiante 21 – Pregunta final – Prueba valorativa
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

- Estudiantes que reconocen la enseñanza de las matemáticas centrada en situaciones problemas como una manera de poner en práctica las matemáticas, pero sobre todo favorecería una actitud positiva hacia él estudia de las matemáticas

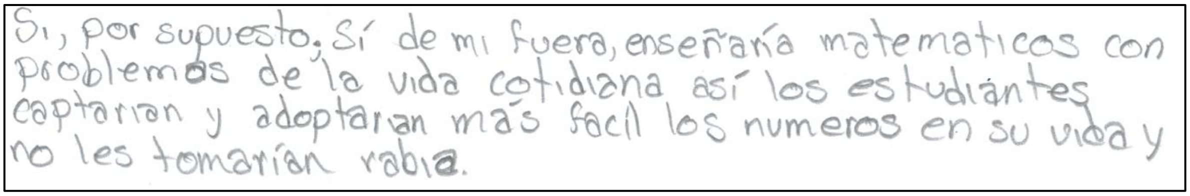

Si, por supuesto, Sí de mi fuera, enseñaría matematicos con problemas de la vida cotidiana así los estudiantes captarian y adoptarian más facil los numeros en su vida y no les tomarían rabia.

Figura 59. Estudiante 4 – Pregunta final – Prueba valorativa
Fuente: Datos alcanzados en el estudio

CAPÍTULO V: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y SUGERENCIAS

5.1. Introducción

En la primera parte del capítulo se responden las preguntas de investigación que ocuparon el desarrollo de este trabajo en conformidad a los objetivos propuestos. Posteriormente se realizan las sugerencias para la enseñanza del concepto de función y las sugerencias para próximas investigaciones subsecuentes.

5.2. Respuestas a las preguntas de investigación

En el primer capítulo se presentaron cuatro preguntas auxiliares y una central. A continuación se dará respuesta a cada una de las preguntas auxiliares que enmarcaran la respuesta a la pregunta central.

5.1.1. *Respuesta a la primera pregunta auxiliar*

¿Cuáles son las creencias que tienen los estudiantes de primer semestre de tecnologías sobre el concepto de función?

El sistema de creencias que tiene un estudiante sobre el concepto de función afecta directamente la manera cómo va a resolver los problemas que involucren dicho concepto. De acuerdo a la prueba diagnóstica implementada a los estudiantes de primer semestre de los programas tecnológicos de la Facultad de Ingenierías se logró determinar que:

- Los estudiantes no dominan el concepto de función y no identifican sus sistemas de representación, ya que el 100% obtuvo un puntaje por debajo del 60% en la prueba diagnóstica.
- Aunque el 100% de los estudiantes no elabora una definición correcta de función, se devela que un 15,9% intenta una construcción desde la concepción de función como variables de dependencia y otro 15,9% desde la concepción de función como un proceso.
- Las representaciones gráficas de curvas continuas son identificadas como función, independiente del número de imágenes que tengan asociados a los valores de su dominio.

- Las representaciones gráficas de funciones discontinuas, en uno o más puntos, no son identificadas como representaciones de funciones.
- Más del 54,5% no identifica las condiciones que se deben cumplir en una representación conjuntista para que esta sea representación de una función. Los estudiantes no identifican el dominio o rango de una función.
- En cuanto a las representaciones textuales de una función, los estudiantes no lograron diferenciar aquellos enunciados que aludían a una relación funcional con aquellos que no lo eran. Un 63,6% de los estudiantes logró identificar como máximo 3 de los 6 enunciados que se presentaron.
- Los estudiantes identifican como función, aquellas representaciones que corresponde a expresiones algebraicas polinómicas.

Estas creencias y dificultades, conllevaron a que los estudiantes no pudieran resolver una situación problema planteada en la prueba diagnóstica, la cual estaba presentada en un contexto hipotético que involucraba 6 interrogantes referidas a una representación gráfica de dicho problema. El 63,3% de los estudiantes contestaron como máximo 3 preguntas correctas de las 6 que se plantearon.

Se logró constatar como el sistema de creencias afecta la manera de resolver problemas en los estudiantes y como estas creencias son difíciles de transformar. Por ejemplo, en el desarrollo de la hoja de trabajo No. 2, se observó cómo los estudiantes le daban continuidad a la representación gráfica de una función escalonada forzando las uniones entre los escalones de dicha función.

Finalmente, las características mencionadas anteriormente respecto al sistema de creencias sobre el concepto de función impactan significativamente el desempeño de los estudiantes en los desarrollos de las situaciones problema y se evidencia lo complejo que es transformarlos, ya que surgen recurrentemente en el desarrollo de las actividades.

5.1.2. *Respuesta a la segunda pregunta auxiliar*

¿Qué características tiene un instrumento de mediación para promover el aprendizaje del concepto de función con estudiantes universitarios?

Las hojas de trabajo que tienen como objetivo mediar entre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función deben presentar múltiples contextos, tanto reales como hipotéticos y matemáticos. Esto se sustenta desde dos perspectivas: por un lado la historia, que nos muestra como la evolución del concepto de función está ligado, en algunos pasajes, por contextos reales de la física que enriquecieron su definición. Y por otro lado, desde la didáctica, pues los contextos en la resolución de situaciones problemas propician conexiones entre las múltiples representaciones del objeto matemático estudiado.

Es interesante observar como las situaciones problema en contextos reales o hipotéticos, además de permitir develar los sistemas de creencias respecto a los objetos matemáticos, permiten que los estudiantes traigan a la memoria sus aprendizajes respecto a situaciones vividas similares a las del contexto que se les plantea. Es así como estas experiencias empiezan a determinar interpretaciones a preguntas que se formulan respecto a la situación problema inicialmente planteada, y a jugar un papel importante en el aprendizaje. Como muestra de lo anterior se presenta, por ejemplo, lo evidenciado con la prueba diagnóstica de la primera hoja de trabajo en la que se pregunta si un líquido se puede evaporar a temperatura ambiente, un 72,7% colocó en consideración situaciones observadas por ellos, “la evaporación de un charco de agua después de una tormenta” o “la evaporación del agua en un florero”. Otros estudiantes manifestaban que no era posible la evaporación del agua a temperatura ambiente, pues esta nunca alcanza los 100 °C para evaporar un líquido. Aquí los estudiantes confundían el punto de ebullición del agua con su evaporación.

Otra situación que sobresale por el uso de los contextos en el aprendizaje de las matemáticas, es el vocabulario que emplean los estudiantes para dar explicaciones a los comportamientos matemáticos, por ejemplo, para construir una ley matemática que diera explicación al comportamiento escalonado en la segunda hoja de los estudiantes hacían uso de expresiones como: la gráfica es “escalerica”, “fracmentada”, “con partiduras”, “por fracciones”, “segmentada”. Todas estas expresiones propiciaron, en la institucionalización, la presentación de las funciones discontinuas en uno o más puntos y, por supuesto, la función parte entera.

En conclusión, los contextos matemáticos, reales o hipotéticos, se constituyen en dinamizadores del proceso de aprendizaje, ya que permiten poner en acto los sistemas de creencias erróneos de los estudiantes y, a su vez, permiten establecer conexiones para la construcción de nuevos significados.

5.1.3. *Respuesta a la tercera pregunta auxiliar*

¿Qué papel desempeña el uso de las TIC en el aprendizaje del concepto de función en el contexto universitario?

Durante el desarrollo de las hojas de trabajo, los estudiantes tuvieron la oportunidad de experimentar diferentes procesos que con el lápiz y el papel no hubiesen sido posibles. Entre ellos están.

- El ensayo y el error: En cada una de las actividades desarrolladas los estudiantes debían determinar la representación algebraica que mejor se ajustara a los puntos que ellos habían registrado en la toma de datos de las diferentes situaciones problema planteadas. Para esto ensayaban las distintas opciones de regresión que propone el GeoGebra para determinar el modelo que más se ajustaba a los datos, proceso que se constituyó en una de las heurísticas más usadas en el software.
- Articulación de diferentes representaciones: Tal y como aparece descrito en la metodología de investigación, para cada una de las hojas de trabajo los estudiantes debían hacer un tránsito entre diferentes representaciones. Lo primero que hacían, después de la toma de datos, era la digitación de los mismos en la hoja de cálculo; posteriormente esos datos eran representados como una lista de puntos los cuales eran observables en la vista gráfica del GeoGebra; seguidamente, se realizaba el análisis de regresión para determinar la curva que mejor se ajustaba a los datos y, finalmente, se

observaba la representación algebraica de la curva seleccionada. con la que contestaban algunas preguntas. Este proceso permitió que los estudiantes pasaran de una comprensión intuitiva de la situación problema estudiada a un nivel más elevado de abstracción del problema, logrando así dar respuesta a los interrogantes que se formulaban.

- Observación de patrones: Cada vez que se les solicitaba a los estudiantes formular una ley que representara la situación planteada, ellos se dirigían a observar la vista gráfica del GeoGebra o a la vista hoja de cálculo en búsqueda de las regularidades o invariantes que les permitieran dar cuenta de la ley solicitada. Este proceso se facilitó con el uso del programa, pues con lápiz y papel demandaría más tiempo y los cambios no ocurrirían en tiempo real.
- La visualización: Este proceso cobró mucha relevancia durante el desarrollo de las hojas de trabajo, pues los estudiantes debían ajustar constantemente los ejes de la vista gráfica del GeoGebra haciendo uso del mouse o debían ajustar la ventana de visualización de la representación gráfica para observar los detalles que querían resaltar. En la hoja de trabajo No. 3, en la que se construyó una representación algebraica de una función por partes, los estudiantes tuvieron la oportunidad de visualizar cada parte de la gráfica para poder determinar el modelo que se ajustaba a esa parte.
- La capacidad investigativa: En la hoja de trabajo No. 2, donde los estudiantes debían explorar la función $Ceil(x)$ del software GeoGebra para ajustar su representación gráfica a la del conjunto de datos registrados en la experimentación, los estudiantes se vieron en la necesidad de asumir una actitud de investigación para lograr el resultado esperado, pues el GeoGebra, les permitió observar en tiempo real, las modificaciones que sufrían las gráficas para poder ajustarlas a los datos obtenidos en la experimentación.

Finalmente, la incorporación de TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, y en particular en el desarrollo de las hojas de trabajo, propició la acción del estudiante sobre distintas representaciones dinámicas y articuladas de dicho objeto matemático y su concepto de función, permitiendo así una transformación significativa del mismo.

5.1.4. *Respuesta a la cuarta pregunta auxiliar*

¿Qué acciones pueden ser implementadas para contribuir al aprendizaje del concepto de función y sus sistemas de representación?

La estructura que se definió para las hojas de trabajo permitió poner de manifiesto los aspectos relevantes del enfoque de la resolución de problemas. Esta estructura se detalla a continuación:

- Fase diagnóstica: La fase diagnostica permitió, en primer lugar, identificar el sistema de creencias y las concepciones erróneas que tienen los estudiantes relacionados con el dominio del concepto de función y sus sistemas de representación. En segundo lugar, el diagnóstico propició determinar el punto de partida para el desarrollo de las actividades propuestas y, finalmente, permitió que los estudiantes se familiaricen con el contexto propuesto y recuerden sus experiencias ya vividas para la construcción de un nuevo conocimiento.
- Fase de experimentación y resolución de preguntas: En esta fase se lograron develar las heurísticas de los estudiantes frente a la resolución de problemas y la manera de pensar las estrategias para la toma de datos. Se resalta el ensayo y el error como una de las heurísticas que más predomina cuando se incorpora TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones, pues mediante esta, y aprovechando las representaciones dinámicas el GeoGebra, lograron articular múltiples representaciones para dar respuesta a los interrogantes formulados.
- Fase de socialización e institucionalización: La fase de socialización, además de exigir a los estudiantes la organización de sus ideas para ser comunicadas y confrontadas por los demás integrantes del grupo, permitió que los estudiantes llevaran conscientemente el control sobre sus propios procesos frente a la resolución de los problemas planteados. Los estudiantes eran conscientes de todo lo que habían realizado y hasta se logró evidenciar cómo después de la socialización muchos estudiantes se devolvían a la fase

de toma de datos y resolución de preguntas para realizar ajustes. En otras palabras, la socialización se constituyó en un medio de regulación de las estrategias metacognitivas en los estudiantes.

Finalmente, llega la fase de institucionalización, donde el docente debe construir el concepto de función, dominio, rango y sus sistemas de representación a partir de todos los elementos aportados por las prácticas de los estudiantes.

5.1.5. *Respuesta a la pregunta principal*

¿Qué caracteriza un diseño de aula que propicie el aprendizaje del concepto de función desde el enfoque de resolución de problemas y desde la mediación instrumental?

Tomando como punto de partida las respuestas a las preguntas auxiliares, se puede afirmar que el aprendizaje del concepto de función desde la resolución de problemas y desde la mediación instrumental se caracteriza por:

- La participación activa de los estudiantes en su proceso de formación. Esta participación está presente durante todo el proceso. Inicialmente hay una prueba diagnóstica donde cada estudiante se enfrenta individualmente a un problema y se confronta a sí mismo. Posteriormente participa en las actividades de socialización donde puede reevaluar sus procesos de aprendizaje para finalmente participar en la institucionalización de los conceptos de función, dominio y rango. Tanto el docente como el estudiante asumen un papel distinto a los procesos de enseñanza y aprendizaje centrados en la exposición del maestro.
- Un aprendizaje del concepto de función en contexto. El enfoque de resolución de problemas permite que el estudiante formule conjeturas frente a una situación que posiblemente le es familiar al estar en un contexto determinado, para posteriormente validar o refutar por el mismo desarrollo del problema. Lo contextos propician que los estudiantes pongan en primer plano sus experiencias vividas y sus sistemas de creencias frente al concepto de función, los cuales serán cuestionados por la experimentación que realizan.

- Propiciar la visualización de un sistema de representaciones articuladas y contextualizadas del concepto de función, de dominio y de rango. La mediación permite que los estudiantes exploren heurísticas que por la vía del lápiz y del papel le son complejas de experimentar.

En conclusión, el proceso de aprendizaje del concepto de función desde la resolución de problemas y desde la incorporación de TIC, se caracteriza como un espacio donde el estudiante es un sujeto activo que confronta sus sistemas de creencias a través del intercambio de experiencias con los demás sujetos y las representaciones que le propicia las TIC.

5.2. Sugerencias para la enseñanza del concepto de función

A continuación se presentan algunas sugerencias para la enseñanza del concepto de función en el contexto universitario:

- Los docentes deben tener presente que el aprendizaje del concepto de función es influenciado por el sistema de creencias. Razón por la cual se deben diseñar actividades donde los estudiantes pongan de manifiesto esas creencias para propiciar acciones concretas y sistemáticas para superarlas si es necesario.
- El enfoque de resolución de problemas y la mediación instrumental propicia elementos básicos para desarrollar la modelación en los estudiantes universitarios, ya que se permite la articulación de múltiples representaciones de un mismo objeto matemático en contextos reales o hipotéticos y porque se potencializan nuevas heurísticas que por la vía del lápiz y del papen no son tan efectivas.
- La metodología de investigación reportada en este informe final se puede constituir en insumo para el diseño de las clases, pues las diferentes fases aportaron en diferentes aspectos al proceso de aprendizaje del concepto de función y, fundamentalmente, se puso en confrontación las creencias de los estudiantes frente a lo que ellos mismos experimentaban en las hojas de trabajo generando una reorganización en sus creencias.

5.3. Sugerencias para investigaciones subsecuentes

A continuación se presentan algunos interrogantes que no fueron abordados en la presente investigación pero que se pueden constituir en investigaciones subsecuentes.

¿Cómo caracterizar el proceso de modelación, desde el enfoque de la resolución de problemas y desde la mediación instrumental en estudiantes universitarios?

¿Cómo se relaciona el aprendizaje del concepto de función con la modelación desde un enfoque experimental de las matemáticas?

¿Qué caracteriza los documentos presentados por los maestros universitarios en relación al concepto de función y sus sistemas de representación?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación matemática*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Barrera, F. y Santos, L. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. México: Cinvestav-IPN.

Benítez, D. (2017). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Carvajal, Y. & Vega, Y. (2014). *El concepto de función: un análisis epistemológico de algunos textos de la reforma de las matemáticas modernas y algunos textos actuales en Colombia.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Crombie, A. C. (1979). *Historia de la ciencia: De San Agustín a Galileo*. Vol. I) Madrid: Alianza Editorial.

Díaz, J. L. (2008). *El concepto de función: Investigaciones y enseñanza*. México: Universidad de Sonora.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). *The concept of function: Aspects of pedagogy and epistemology*. Washington: Mathematical Association of America, Notes 25.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (Myrian Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995).

Gairín, J. (2001). Grupo Cero, ¿nostalgia? *Revista Suma*. No. 38

Gómez, A. (2010). *La escolarización de la reforma de las matemáticas modernas en la educación media en Colombia en torno a los conceptos de relación, función y conjunto durante el período 1960-1985*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Gómez, V. (1995). *Educación tecnológica en Colombia: ¿Educación terminal o primer ciclo de las ingenierías y las ciencias?* Bogotá: Editorial Universidad Nacional.

Hart, E. W., Hirsch, C. R., & Keller, S. A. (2007). *Amplifying Student Learning in Mathematics Using Curriculum-Embedded, Java-Based Software*. En W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott. The Learning of Mathematics (págs. 175-202). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Pearson Educación.

Lupiañez, J., y Moreno, L. (2001). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. En Gómez, P., y Rico, L. (eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2008). *Educación técnica y tecnológica para la competitividad*. Bogotá, Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2001). *Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*. Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, Colombia.

Moreno, L. (1999). *Mediación Instrumental y tecnología informática en la educación matemática*. Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger. Grupo Editorial Iberoamérica, octubre de 1999.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMIstudy (pp. 3–32). New York: Springer-Verlag

Pérez, A (1992). Matemáticas Experimentales. *Revista Suma*. (Invierno-1992) 27-41.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Pricenton University Press.

MEN (2016). Resumen ejecutivo Colombia en PISA 2015. Icfes.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén, España.

Sacristán, A.I. (2003). La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. Artículo presentado en conferencia plenaria en el 3er Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC) en el Instituto Tecnológico de Costa Rica en Cartago, Costa Rica, en Diciembre del 2003.

Sandoval, I. y Moreno, L (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, 14(1), 21-29.

Santos, L (1993). La resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas. *Cuaderno de Investigación* 27(7). Programa Nacional de formación de profesores de matemáticas. México: Cinvestav-IPN

Santos, L. (5 febrero de 2018). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=008200020127.

Santos, L. (1998). Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículo y en el aprendizaje de los estudiantes. En Hitt, F. (1998) investigación en matemáticas Educativa II. Grupo Editorial iberoamericana. México

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New Yor: Academic Press.

Sierpinska, A. (1992). *The concep of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes 25: 25-58. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Trujillo, M., & Castro, N., & Delgado, C. (2010). *El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras*. Universidad de la Salle. Bogotá. Ediciones Unisalle.

Youschkevitch, A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th. *Archive for history of exact sciences*, 16(1), 37-85

ANEXOS

Anexo 1: Prueba Diagnostica

Con el propósito de propiciar un mejor aprendizaje del concepto de función en los estudiantes de primer semestre de la Institución Universitaria Antonio José Camacho, se está adelantando una investigación adscrita a la Universidad del Valle en el marco de la Maestría en Educación: Énfasis Educación Matemática. Usted está invitado a participar en este estudio, para lo cual se solicita contestar la siguiente prueba diagnóstica.

La prueba está conformada por 7 partes. La parte 1, 6 y 7 corresponden a preguntas abiertas donde debe escribir su respuesta de manera legible y ordenada. Las preguntas 2, 3, 4 y 5 son preguntas que tienen tres opciones de respuesta, debes marca solo uno de ellas. Esta prueba no conlleva ninguna calificación para el semestre, por lo tanto siéntase libre de desarrollarla con total responsabilidad, pero propóngase a demostrar su mejor nivel.

IMPORTANTE

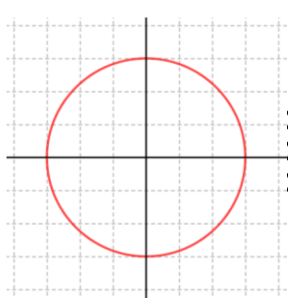
- *Esta prueba es individual*
- *Lee detenidamente cada pregunta.*
- *Una vez que entienda la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.*
- *Existe un espacio para que justifique detalladamente algunas de sus respuestas. Si requieres realizar alguna operación, escríbela a un lado de la pregunta.*
- *En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.*
- *Contesta con lapicero negro, letra legible y ordenadamente.*

###

1. Con tus propias palabras define lo que entiendas por función

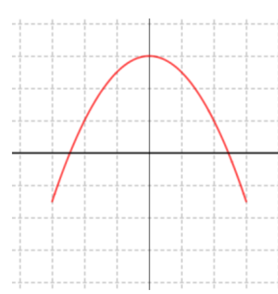
2. A continuación encontraras ocho representaciones gráficas sobre un plano cartesiano. Para cada una de ellas indica, en las casillas que aparecen, si la representación es de una función, no lo es o no sabes.

a.



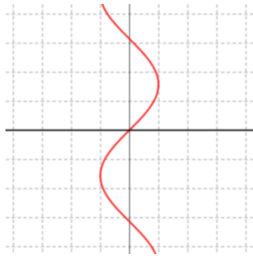
○ Es función
○ No es función
○ No sé

b.



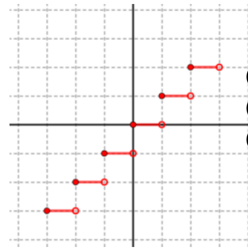
○ Es función
○ No es función
○ No sé

c.



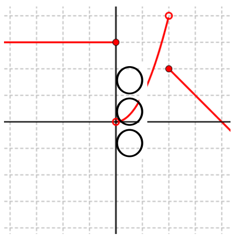
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

d.



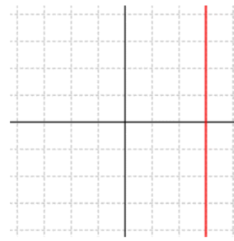
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

e.



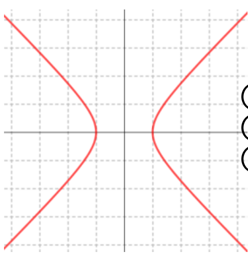
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

f.



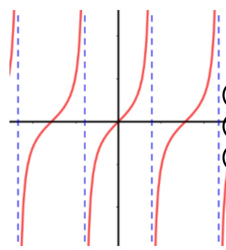
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

g.



◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

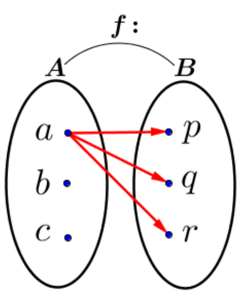
h.



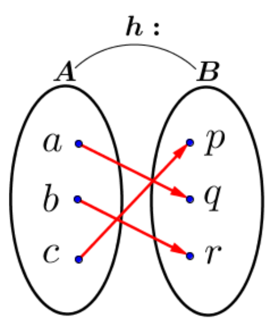
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

3. A continuación se presentan seis relaciones entre dos conjuntos ¿Cuáles de ellas son funciones?

a.



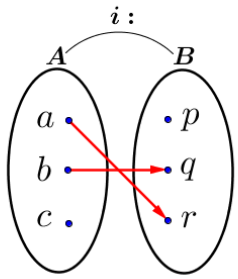
b.



Es función
No es función
No sé

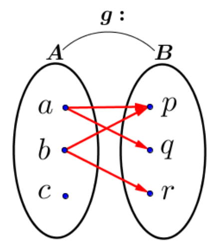
Es función
No es función
No sé

c.



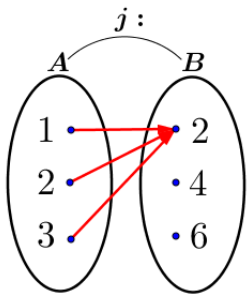
Es función
No es función
No sé

d.



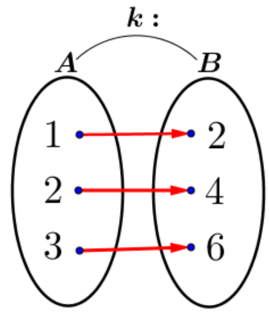
Es función
No es función
No sé

e.



Es función
No es función
No sé

f.



Es función
No es función
No sé

4. ¿De los siguientes enunciados cuales evocan una función?

a. El doble de un número dado

Es función
No es función
No sé

b. El triple de un número es equivalente al mismo aumentado en cinco

Es función
No es función
No sé

c. El área de un cuadrado dado la longitud de su lado

Es función
No es función
No sé

d. Cinco veces ocho

Es función
No es función
No sé

e. La diferencia entre dos números

Es función
No es función
No sé

f. Número de letras de una palabra dada

Es función
No es función
No sé

5. De las siguientes representaciones algebraicas ¿cuáles corresponden a funciones?

a. $x^2 + xy + y^2 = 4$

- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

b. $x + y = 4$

- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

c. $\frac{4x-4}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)^2}$

- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

d. $h(r) = sen(2r) + \cos(3r)$

- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

e. $g(t) = \begin{cases} 4, \text{ si } t < 0 \\ -t + 2, \text{ si } 0 \leq t < 3 \\ 5t^2 + 1, \text{ si } t \geq 3 \end{cases}$

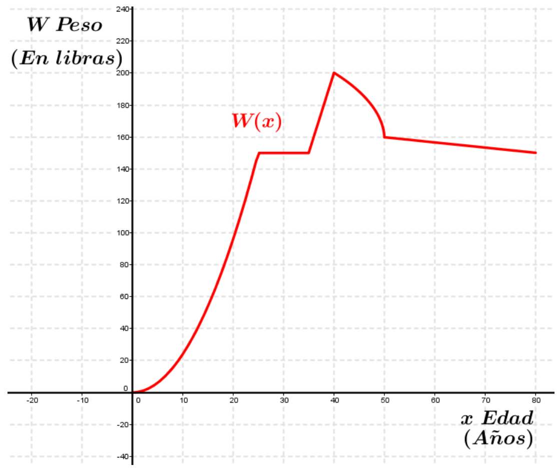
- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

f. $4x^2 + 4x - 16$

- ◯ Es función
- ◯ No es función
- ◯ No sé

6. Redacta con tus propias palabras lo que tú entiendes por dominio y por recorrido (o rango) de una función.

7. La gráfica de la figura da el peso W de una persona en relación a su edad x. Conteste las siguientes preguntas:



a. ¿Cuál es la variable independiente?	b. ¿Cuál es la variable dependiente?
c. ¿Cuál es el dominio de la función?	d. ¿Cuál es el rango de la función?
e. ¿A qué edad el peso fue de 160 lb?	f. ¿Cuál era el peso a los 23 años de edad?

Anexo 2: Acta de reunión. Validación prueba diagnóstica y prueba final

Antonio José Camacho
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

ACTA DE REUNIÓN

V – 2.0 – 2015
COM-F-20

1092 - 05.38 – 67/ 17

COMITÉ ___ GRUPO ___ EQUIPO X CONSEJO __ OTRO ___ Cual?________

NOMBRE: Reunión con Docentes Ocasionales de Tiempo Completo del DCB No. ____
LUGAR: Sala Docente DCB UNIAJC FECHA: 30 de enero de 2018 HORA: De 2:00 a 4:00 p.m.

PARTICIPANTES – ASISTENTES

NOMBRE	CARGO	FIRMA	NOMBRE	CARGO	FIRMA
Carlos Arturo Muñoz Vargas	Director DCB		Liliana Andrea Potosí Cruz	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Víctor Manuel Uribe Villegas	Docente Ocasional Tiempo Completo		Emiliano Grueso Cárdenas	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Eider Leandro Arcila Dager	Docente Ocasional Tiempo Completo		Sandra Esther Suárez Chávez	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Julián Andrés Ángel Jiménez	Docente Ocasional Tiempo Completo		Alexander Arévalo Soto	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Milton Fabián Castaño Muñoz	Docente Ocasional Tiempo Completo		Luis Felipe Ramírez Otero	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Juan Carlos Burbano Zapata	Docente Ocasional Tiempo Completo		Ademir Lucumí Villegas	Docente Ocasional Tiempo Completo	

ORDEN DEL DÍA

1. Socialización del proyecto de investigación titulado "Aprendizaje del concepto de función desde la resolución de problemas y desde la mediación instrumental en estudiantes de primer semestre de programas tecnológicos"

DESARROLLO

1. El profesor Víctor Manuel Uribe Villegas presenta el proyecto de investigación que está llevando acabo en el marco de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática; cuyo objetivo principal es: "Caracterizar una propuesta de aula para el aprendizaje del concepto de función, desde el enfoque de resolución de problemas y desde la mediación instrumental"

   La metodología de investigación se enmarca en un pre-experimento cuyas pruebas diagnostica y final son socializadas. Se le sugiere ajustar las preguntas de la parte II a la parte V de dichas pruebas, de tal manera evalúe lo mismo conservando la misma estructura en cuanto a las representaciones para el momento de la comparación.

   Una ves aplicada la prueba diagnostica el docente diseñará los instrumentos que incorporará en su intervención.

COMPROMISO	RESPONSABLE	FECHA DE ENTREGA
1. Presentar instrumentos que implementará en la intervención de aula.	Profesor Víctor Manuel Uribe	Por confirmar

OBSERVACIONES: Ninguna.

PRÓXIMA REUNIÓN

LUGAR: Por confirmar	**FECHA:** Por confirmar	**HORA:** Por confirmar

Anexo 3: Acta de reunión. Validación hojas de trabajo

Antonio José Camacho
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

ACTA DE REUNIÓN

V – 2.0 – 2015
COM-F-20

1092 - 05.38 – 67/ 17

COMITÉ ___ GRUPO ___ EQUIPO X CONSEJO ___ OTRO ___ Cual?_______

NOMBRE: Reunión con Docentes Ocasionales de Tiempo Completo del DCB No. ____
LUGAR: Sala Docente DCB UNIAJC FECHA: 20 de febrero de 2018 HORA: De 2:00 a 4:00 p.m.
PARTICIPANTES – ASISTENTES

NOMBRE	CARGO	FIRMA	NOMBRE	CARGO	FIRMA
Carlos Arturo Muñoz Vargas	Director DCB		Liliana Andrea Potosí Cruz	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Víctor Manuel Uribe Villegas	Docente Ocasional Tiempo Completo		Emiliano Grueso Cárdenas	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Eider Leandro Arcila Dager	Docente Ocasional Tiempo Completo		Sandra Esther Suárez Chávez	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Julián Andrés Ángel Jiménez	Docente Ocasional Tiempo Completo		Alexander Arévalo Soto	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Milton Fabián Castaño Muñoz	Docente Ocasional Tiempo Completo		Luis Felipe Ramírez Otero	Docente Ocasional Tiempo Completo	
Juan Carlos Burbano Zapata	Docente Ocasional Tiempo Completo		Ademir Lucumí Villegas	Docente Ocasional Tiempo Completo	

ORDEN DEL DÍA

1. Socialización de la metodología de investigación y de los instrumentos a aplicar del proyecto de titulado "Aprendizaje del concepto de función desde la resolución de problemas y desde la mediación instrumental en estudiantes de primer semestre de programas tecnológicos" por el profesor Víctor Manuel Uribe Villegas

DESARROLLO

1. El profesor Víctor Manuel Uribe Villegas manifiesta que la prueba diagnostica puso de manifiesto el sistema de creencia de los estudiantes respecto al concepto de función. Manifiesta que para una gran mayoría de los estudiantes una función debe tener una representación gráfica continua, o su representación algebraica debe ser siempre polinómica y no, por ejemplo, por partes. Frente estas creencias el profesor propone las siguientes situaciones problema:
   I. Situación problema en la que se estudia la evaporación del agua a temperatura ambiente para establecer la relación de volumen en función del tiempo e introducir el concepto de función, dominio, rango, variable dependiente e independiente.
   II. Situación problema que involucra el costos por pagar en una estacionamiento en función del tiempo. Esta situación permitirá trabajar con funciones discontinua y, en particular, la función parte entera.
   III. Situación problema en la que se estudia el volumen del agua cuando se calienta a una temperatura constante. Esta situación será hipotética por que se utiliza un laboratorio virtual donde la curva de calentamiento se modela a partir de una función por partes.

   Estas actividades no tienen objeciones y son aprobadas por el consejo del DCB.

COMPROMISO	RESPONSABLE	FECHA DE ENTREGA
1. Presentar instrumentos que implementará en la intervención de aula.	Profesor Víctor Manuel Uribe	Por confirmar

OBSERVACIONES: Ninguna.

PRÓXIMA REUNIÓN

LUGAR: Por confirmar	**FECHA:** Por confirmar	**HORA:** Por confirmar

Anexo 4: Prueba de Salida

IMPORTANTE

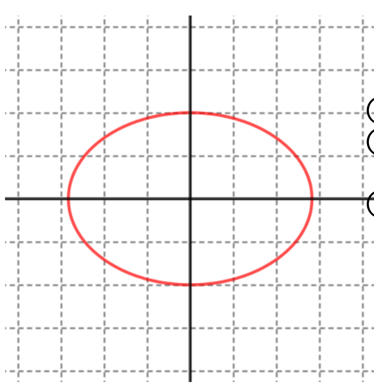
- *Esta prueba es individual*
- *Lee detenidamente cada pregunta.*
- *Una vez que entienda la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.*
- *Existe un espacio para que justifique detalladamente algunas de sus respuestas. Si requieres realizar alguna operación, escríbela a un lado de la pregunta.*
- *En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.*
- *Contesta con lapicero negro, letra legible y ordenadamente.*

##

8. Con tus propias palabras define el concepto de función.

9. A continuación encontraras ocho representaciones gráficas sobre un plano cartesiano. Para cada una de ellas indica, en las casillas que aparecen, si la representación es de una función, no lo es o no sabes.

a.

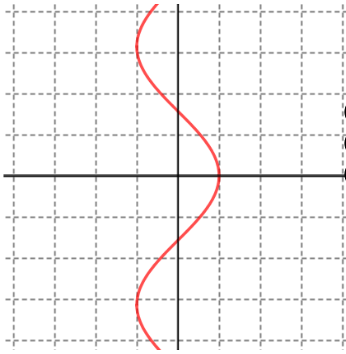


◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

b.

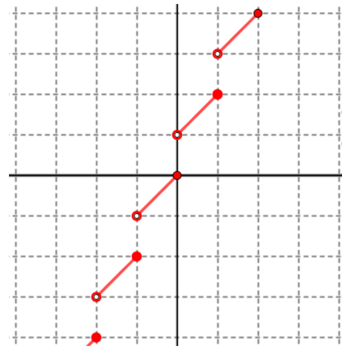
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

c.



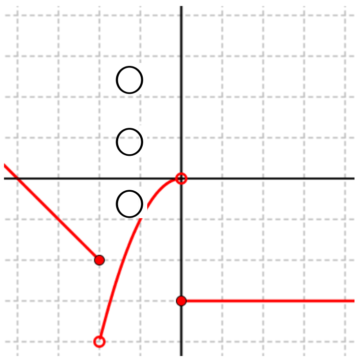
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

d.



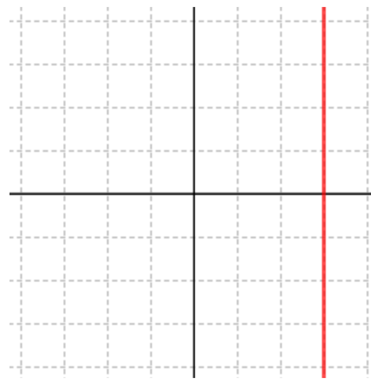
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

e.



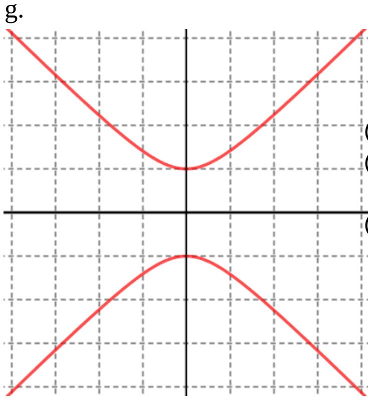
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

f.



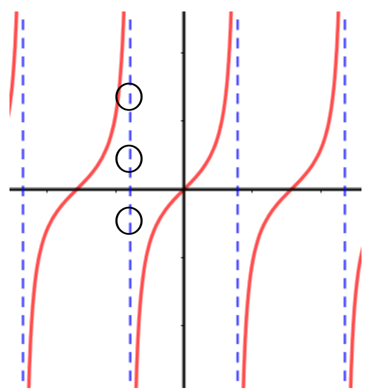
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

g.



◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

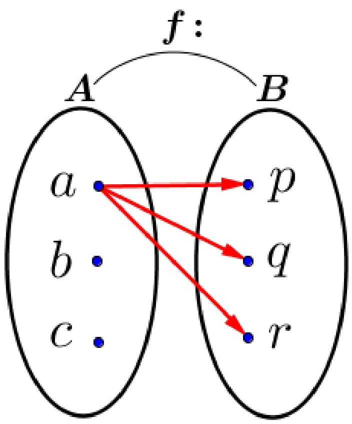
h.



◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

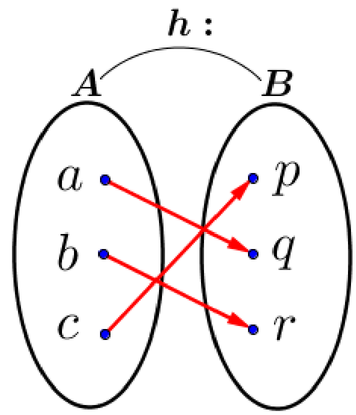
10. A continuación se presentan seis relaciones entre dos conjuntos ¿Cuáles de ellas son funciones?

a.



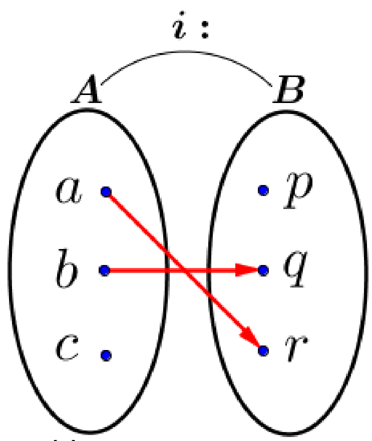
Es función
No es función
No sé

b.



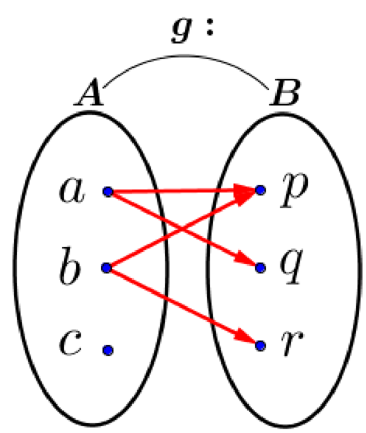
Es función
No es función
No sé

c.



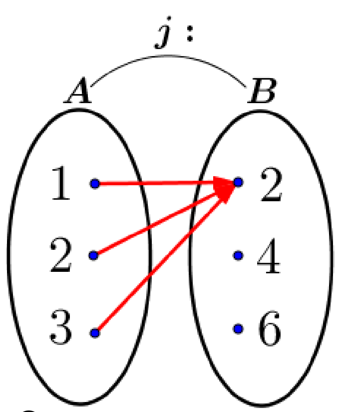
Es función
No es función
No sé

d.



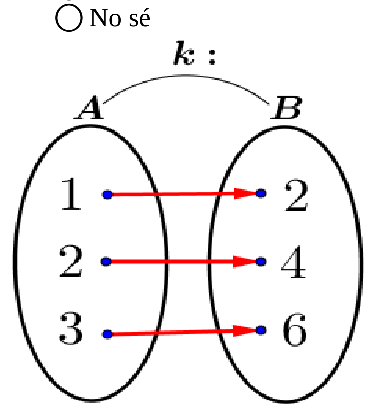
E
s función
No es función
No sé

e.



Es función
No es función

f.



Es función
No es función

◯ No sé ◯ No sé

11. ¿De los siguientes enunciados cuales evocan una función?

a. El triple de un número dado

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

b. El doble de un número es equivalente a seis

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

c. La temperatura de una ciudad en relación al tiempo en horas

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

d. Cinco veces ocho

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

e. La diferencia entre dos números

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

f. El volumen de un cubo en relación a la diagonal de su base.

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

12. De las siguientes representaciones algebraicas ¿cuáles corresponden a funciones?

a. $x^2 + xy + y^2 = 4$

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

b. $x + y = 4$

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

c. $\frac{4x-4}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)^2}$

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

d. $h(r) = sen(2r) + \cos(3r)$

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

e. $g(t) = \begin{cases} 4, \text{ si } t < 0 \\ -t + 2, \text{ si } 0 \leq t < 3 \\ 5t^2 + 1, \text{si } t \geq 3 \end{cases}$

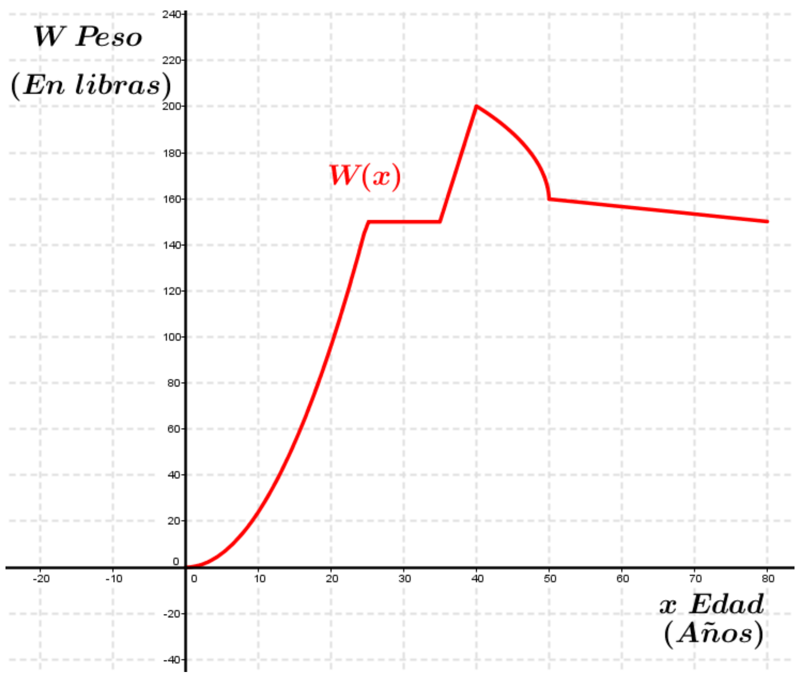
◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

f. $4x^2 + 4x - 16$

◯ Es función
◯ No es función
◯ No sé

13. Redacta con tus propias palabras lo que tú entiendes por dominio y por recorrido (o rango) de una función.

14. La gráfica de la figura da el peso W de una persona en relación a su edad x. Conteste las siguientes preguntas:



a. ¿Cuál es la variable independiente?	b. ¿Cuál es la variable dependiente?

c. ¿Cuál es el dominio de la función?	d. ¿Cuál es el rango de la función?
e. ¿A qué edad el peso fue de 160 lb?	f. ¿Cuál era el peso a los 23 años de edad?

Anexo 5. Tabla de frecuencia por preguntas de la prueba diagnostica

Pregunta	**No. de respuestas correctas**	**f%**
1	0	0,0%
2A	16	36,4%
2B	38	86,4%
2C	10	22,7%
2D	9	20,5%
2E	10	22,7%
2F	20	45,5%
2G	13	29,5%
2H	21	47,7%
3A	15	34,1%
3B	29	65,9%
3C	20	45,5%
3D	27	61,4%
3E	21	47,7%
3F	36	81,8%
4A	34	77,3%
4B	20	45,5%
4C	26	59,1%
4D	21	47,7%
4E	17	38,6%
4F	12	27,3%
5A	10	22,7%
5B	22	50,0%
5C	11	25,0%
5D	24	54,5%
5E	11	25,0%
5F	12	27,3%
6	0	0,0%
7A	20	45,5%
7B	20	45,5%
7C	1	2,3%
7D	4	9,1%
7E	3	6,8%
7F	34	77,3%

Anexo 6. Tabla de calificaciones por estudiante y estadígrafos de la prueba diagnostica

NOMBRE	No. RESPUESTAS CORRECTAS	PRUEBA INICIAL
Est. 1	18	52,9
Est. 2	10	29,4
Est. 3	16	47,1
Est. 4	15	44,1
Est. 5	15	44,1
Est. 6	15	44,1
Est. 7	16	47,1
Est. 8	16	47,1
Est. 9	20	58,8
Est. 10	19	55,9
Est. 11	14	41,2
Est. 12	17	50,0
Est. 13	7	20,6
Est. 14	5	14,7
Est. 15	13	38,2
Est. 16	14	41,2
Est. 17	12	35,3
Est. 18	16	47,1
Est. 19	15	44,1
Est. 20	14	41,2
Est. 21	13	38,2
Est. 22	8	23,5
Est. 23	20	58,8
Est. 24	7	20,6
Est. 25	10	29,4
Est. 26	14	41,2
Est. 27	12	35,3
Est. 28	20	58,8
Est. 29	20	58,8
Est. 30	16	47,1
Est. 31	11	32,4
Est. 32	7	20,6
Est. 33	14	41,2
Est. 34	12	35,3
Est. 35	14	41,2
Est. 36	14	41,2
Est. 37	12	35,3
Est. 38	11	32,4
Est. 39	6	17,6
Est. 40	13	38,2
Est. 41	13	38,2
Est. 42	9	26,5
Est. 43	13	38,2
Est. 44	11	32,4

Media	13,3	39,2%
Mediana	14	41,2%
Moda	14	41,2%
Desv. Estand.	3,8	11,3%
Rango	15	44,1%

Anexo 7. Capacitación básica en el uso del GeoGebra

GeoGebra es un ***software de matemáticas dinámicas*** para todos los niveles educativos. Reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa. Su entorno inicial, cuando lo abres por primera vez, es el que aparece en la figura No. 1.

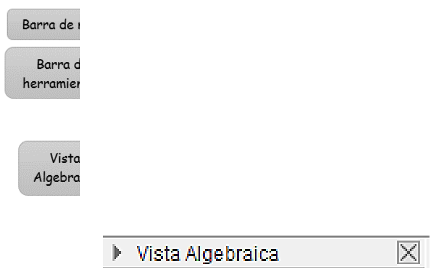
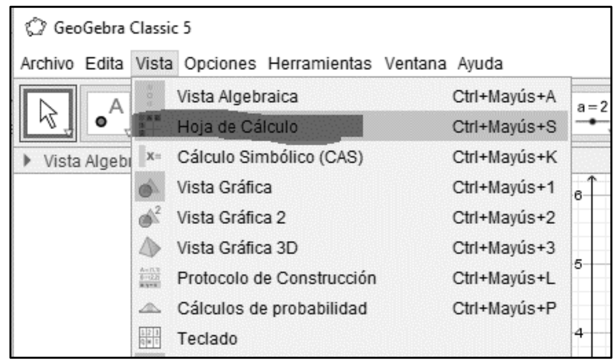


Figura No. 1: Entorno gráfico del GeoGebra

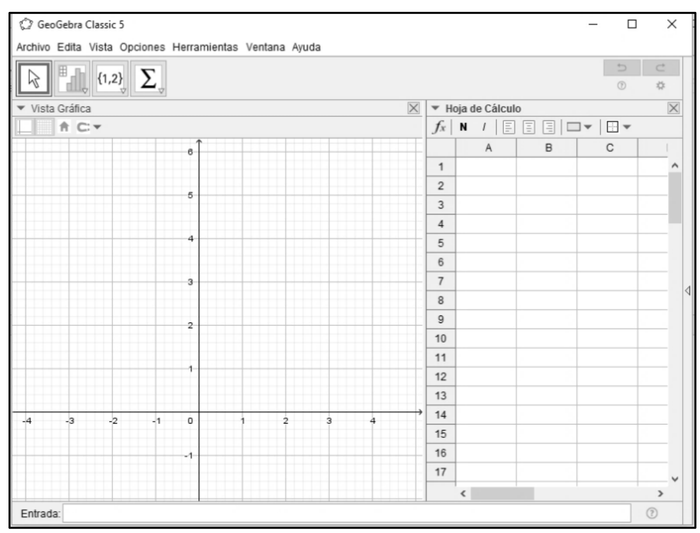
El software tiene otras vistas que están desactivadas por defecto. Solo es ingresar al menú ***vista*** y seleccionar la que es de interés. Cada vez que se active una vista en particular, la barra de herramientas se ajustará a esta nueva vista, es decir que la barra de herramientas depende de la vista que tengamos seleccionada.

Para las actividades que se realizaran a continuación, se debe:

1. Ocultar la vista algebraica dando clic en la cruz del título de la vista
2. Activar la vista hoja de cálculo dando clic en ***vista*** y seleccionar ***hoja de cálculo***



3. La pantalla del GeoGebra debe tener la siguiente presentación



ACTIVIDAD No. 1: CONTEXTO MATEMÁTICO

1. En la vista ***hoja de cálculo*** cada estudiante ingresará la siguiente lista de números.

1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15

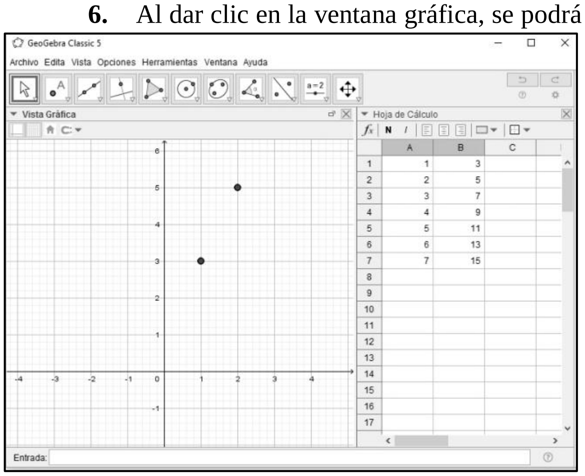
2. Una vez ingresados los números, deberán ser seleccionados con clic sostenido

3. Teniendo la lista seleccionada, se desplazará a la ***barra de herramienta*** y dará clic en el botón ***lista de puntos***

4. Seleccionará la ***lista de puntos*** y en la ventana emergente dará clic en ***crear***

5. Al realizar el procedimiento anterior, se deberá obtener la siguiente representación

6. Al dar clic en la ventana gráfica, se podrá seleccionar la herramienta que se denomina ***Desplaza vista gráfica***, como aparece en la figura.



7. Esta herramienta, permitirá ajustar la ventana de visualización de la ***vista gráfica*** desplazando los ejes al lugar que se desee. Ajusta los ejes hasta que todos los puntos sean visibles.

8. Si en la columna de la izquierda, de la lista de los números dados en el punto 1, se agregara el número 27, el 353 y el 1743 ¿Qué números deberían ir en la columna de la derecha?

9. Ahora veremos que comportamiento tienen estos puntos. Para esto se hará uso de una herramienta llamada ***análisis de regresión de dos variables***. Se debe seleccionar la lista de números de la hoja de cálculo.

10. Ir a la barra de herramientas y seleccionar el botón ***análisis de regresión de dos variables***

11. En la ventana emergente, se selecciona el botón ***analiza*** y observamos la gráfica que aparece.

12. Podemos seleccionar entre diferentes modelos de regresión el que más se ajuste.

13. Una vez seleccionado nuestro modelo de regresión damos clic en el  botón para copiar la gráfica en la ***vista gráfica.***

14. Ahora activa la vista algebraica del menú vista.

15. Observa en la parte superior de la vista algebraica la expresión matemática que apareció. cópiela en el siguiente espacio

16. ¿Para qué crees que sirve dicha expresión?

17. Remplaza en ella los valores de la lista que se encuentran en la columna de la izquierda de la tabla del punto 1 y verifica los resultados. También remplaza los valores del punto 8.

ACTIVIDAD No. 2: CONTEXTO REAL

A continuación analizaremos la relación que existe entre el número de apretones de mano cuando un grupo de $\boldsymbol{n}$ personas se saludan. Entiéndase que si una persona A saluda a la persona B, pues B no tendrá que saludar a la persona A.

1. Siéntate con un compañero y salúdense ¿Cuántos apretones de mano hubo?

2. Siéntate con dos compañeros más (es decir un grupo de 3 personas) y salúdense ¿Cuántos apretones de mano hubo?

3. Siéntense en grupos de 4 personas y salúdense ¿Cuántos apretones de mano hubo?

4. Completa la siguiente tabla

Número de personas $\boldsymbol{n}$	Número de apretones de mano
1	
2	
3	
4	
5	
6	

5. Abre un archivo nuevo en GeoGebra

6. Oculta la ***vista algebraica*** y activa la ***vista hoja de calculo***

7. Ingresa la lista de la tabla del punto 4, a la hoja de calculo

8. Crea una lista de puntos

9. Has un análisis de regresión

10. Mira cual es el mejor modelo de regresión que se ajusta a los datos

11. Inserta el modelo de regresión a la vista gráfica

12. Activa la vista algebraica

13. ¿Qué expresión aparece en la vista algebraica?

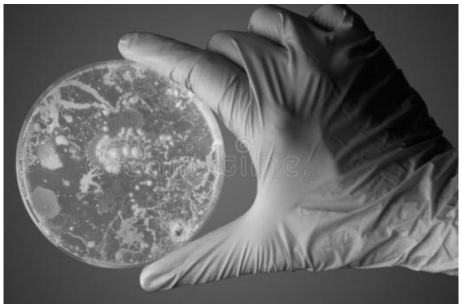
14. Has una regresión

15. El primer día de clase de matemáticas I, asistieron 44 estudiantes al salón; si todos los estudiantes se hubiesen saludado con un apretón de manos ¿Cuántos apretones de manos se abrían dado en total? Has los cálculos en el siguiente espacio.

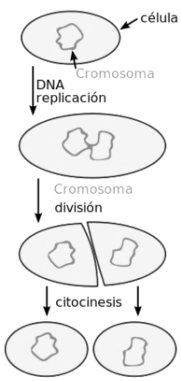
16. ¿Qué significa la expresión del punto 13 y para qué sirve?

ACTIVIDAD No. 3: CONTEXTO HIPOTÉTICO

Placa de Petri



Las bacterias son organismos microscópicos unicelulares carentes de núcleo, que se multiplican por división celular sencilla. Las bacterias crecen hasta un tamaño fijo y después se reproducen por fisión binaria en la que se obtienen dos individuos idénticos al primero, una forma de reproducción asexual. Ver figura.



Fisión binaria

Por ejemplo; bajo condiciones óptimas, la bacteria ***Escherichia coli*** que es la causa más frecuente de infección urinaria y, en menor medida, de otras infecciones como meningitis en el neonato o infecciones respiratorias, se puede dividir una vez cada 20 minutos.

Supongamos que para un experimento, bajo condiciones óptimas, contamos con una colonia de 50 individuos de la ***Escherichia coli*** y empezamos a registra el crecimiento de la población cada 20 minutos.

1. Completa la siguiente tabla:

Tiempo, t (en minutos)	No. de Ind. en la placa de Petri
20	
40	
60	
80	
100	
120	
140	
160	
180	
200	

2. Abre un archivo nuevo en GeoGebra

3. Repite los pasos de las actividades anteriores.
   - Ingresa los datos a la vista hoja de calculo
   - Crea una lista de puntos
   - Aplica la herramienta regresión

4. ¿Cuál es el modelo de regresión que se ajusta mejor a los datos?

5. Al cabo de 92 minutos ¿Cuántas bacterias abrían, aproximadamente?

6. Si se desea terminar el experimento cuando hayan 10000 bacterias ¿en qué minuto se debe detener?

Anexo 8: Hoja de trabajo No. 1 “Evaporación de un Líquido”

La evaporación es un proceso físico que consiste en el paso lento y gradual de un estado líquido hacia un estado gaseoso, tras haber adquirido suficiente energía para vencer la tensión superficial.

<u>PARTE 1:</u>

DIAGNÓSTICO

1. Consideras posible que un líquido, a temperatura ambiente ¿se puede evaporar al pasar el tiempo? Da una respuesta y anexa ejemplos o contraejemplos, según tu creencia.

LOS PREPARATIVOS

2. Imagine que tienes un líquido, en un recipiente, en contacto con el aire. El líquido se empezará a evaporar. Diseña por lo menos dos métodos diferentes para estimar el volumen del líquido que queda en el recipiente al transcurrir el tiempo. Describe ampliamente cada método.

Método 1	Método 2

3. ¿Cuál de los dos métodos es más preciso? ¿Por qué? Justifique.

PARTE 2:

EL EXPERIMENTO

4. Selecciona el líquido de su preferencia para observar su comportamiento en cuanto a la evaporación. Indica cual es:

5. En los preparativos diseñaste dos métodos para calcular el volumen a medida que transcurre el tiempo. Pon en práctica el método que te dé mayor precisión para estimar el volumen del líquido que queda en el recipiente. Fíjate una hora de inicio (por ejemplo 5:00 a.m.) y a partir de ahí, deberás medir el volumen de dicho liquido cada 12 horas. Por ejemplo, si iniciaste el experimento a las 5:00 a.m. deberás medir nuevamente a las 5:00 p.m. y así sucesivamente.

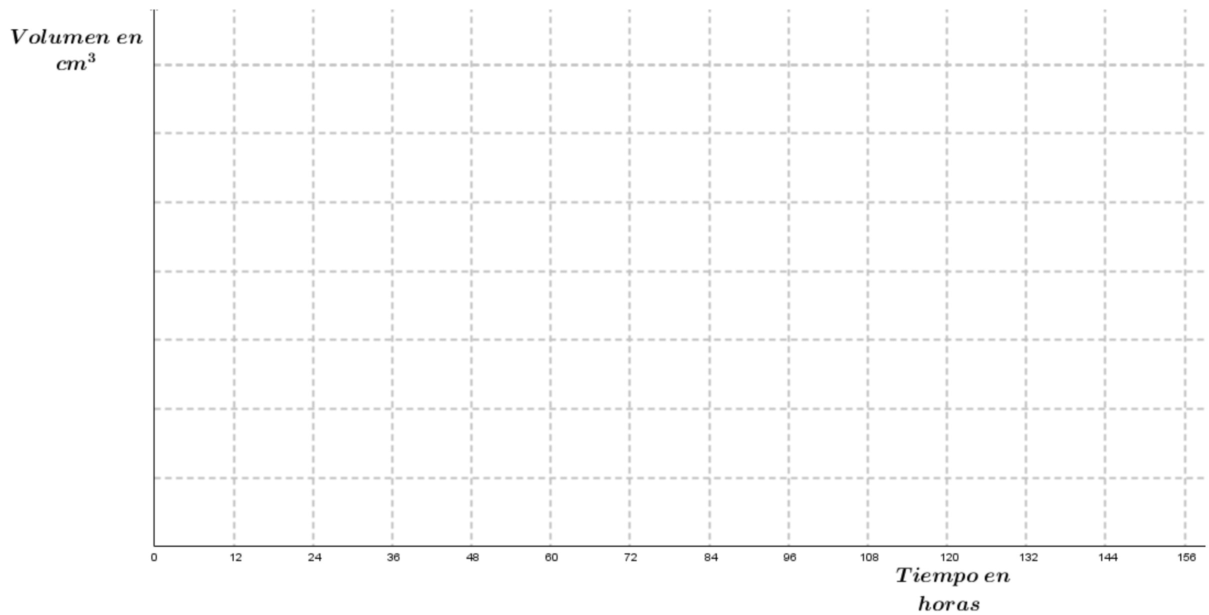
6. Completa la siguiente tabla.

Tiempo (horas)	**Volumen (cm^3)**
0	
12	
24	
36	
48	
60	
72	
84	
96	
108	
120	

7. Observando la tabla del punto 6, estima que volumen habrá al transcurrir 51 horas

8. De acuerdo a la tabla del punto 6, estima a qué horas se evaporará completamente el liquido

9. Usando la tabla de valores del punto 6, has una representación gráfica del fenómeno en el siguiente plano.



PARTE 3:

EN EL SALÓN DE CLASE

10. Utiliza los datos de la tabla del punto 6 para hacer una gráfica en el software GeoGebra. Recuerda:
    - Ingresa los datos a la vista hoja de calculo
    - Crea una lista de puntos
    - Has una regresión y selecciona la que mejor se ajusta a los datos

11. Has la gráfica que obtuviste

12. Escribe la expresión algebraica que se obtuvo después de realizar la regresión entre los datos

13. Usando la expresión algebraica contesta la pregunta 7 y la pregunta 8. Has los procedimientos en el siguiente espacio.

SOCIALIZACIÓN

14. De manera aleatoria se seleccionarán tres estudiantes para que expliquen su experimento incluyendo su técnica empleada. También valorarán la actividad.

INSTITUCIONALIZACIÓN

Preguntas orientadoras

15. ¿Cuáles son las variables que intervinieron en el experimento?

16. ¿Existe una relación entre esas variables? ¿Qué tipo de relación?

17. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

18. ¿Entre que valores varió la variable dominante, es decir la independiente?

19. ¿Entre que valores varió la variable dependiente?

20. A cada instante de tiempo ¿Cuántos registros de volúmenes le corresponden?

21. ¿Cómo **NO** podría ser una gráfica de esta relación? Has dos ejemplos

22. ¿qué tan importante son las representaciones numéricas, gráficas algebraicas y textuales de una relación entre variables?

Anexo 9. Análisis hoja de trabajo 1

<table>
<tr><th colspan="2">HOJA DE TRABAJO</th><th>OBSERVACION DESCRIPTIVA FRENTE AL INSTRUMENTO</th></tr>
<tr><td>Parte I</td><td>1. Diagnostico</td><td>
1. Sobre la pregunta ¿Consideras posible que un líquido a temperatura ambiente se pueda evaporar al pasar el tiempo?
• Un 11,4% de los estudiantes cree que el agua no se evapora a temperatura ambiente; entre los argumentos que dan algunos de ellos están: el punto de ebullición del agua es de 100 °C, temperatura que nunca se alcanzará a la intemperie. Esta afirmación muestra que algunos estudiantes asocian la evaporación de un líquido únicamente a su punto de ebullición, lo cual es falso.
• Un 15,9% de los estudiantes manifiesta que la evaporación depende de la temperatura del ambiente, razón por la cual puede que sí se presente evaporación o puede que no, dependiendo de la temperatura externa del líquido.
• Un 72,7% manifiesta que un líquido sí se evapora a temperatura ambiente y algunos estudiantes ponen como ejemplos la cantidad del agua en los floreros, el agua de los lagos, el agua de las piscinas. Etc.
</td></tr>
<tr><td>Parte II</td><td>2. La experimentación</td><td>
2. A la pregunta de cómo medir el volumen de un líquido cada vez que se vaya a tomar un registro los estudiantes plantean diferentes estrategias que se han agrupado de la siguiente manera:
• 9,1% de los estudiantes manifiesta que el volumen se puede determinar haciendo uso de la fórmula de la densidad y calculando el peso del líquido, ya que se puede consultar la densidad de los líquidos.
• 15,9% de los estudiantes, manifiestan calcular el volumen del recipiente haciendo uso de las formulas geométricas conocidas
• 75% de los estudiantes manifiesta usar recipientes con medidas volumétricas que son más precisas que cualquier otra técnica.
3. ¿Cuál de las dos técnicas es más precisa?
• Las respuestas se corresponden a la pregunta 2.
4. ¿Qué líquido eligieron para el análisis?
• 31,8% agua
• 25% alcohol
• 13,6% bebidas alcohólicas
• 29,9% otros líquidos
5. Son instrucciones del experimento
6. Elaboración de la tabla
• 90,9% de las tablas muestra una relación indirecta
• 4,5% son tablas constantes
• 2,3% tablas escalonada
• 2,3% tabla incompleta
7. Estimación de un volumen
• 63% toma el registro en el tiempo solicitado
• 18,2% asume la relación de manera lineal y utiliza la ecuación de la recta para estimar el valor
• 9,1% estiman el valor observando la tabla directamente
• 4,5% asumen la relación como una proporcionalidad directa y aplican regla de tres simple.
</td></tr>
</table>

		• 2,3% no contesta la pregunta • 2,3% realizan la estimación usando la gráfica **8. A qué horas se evaporará el líquido** • El 100% de los estudiantes hacen una estimación observando la tabla de valores que construyeron. **9. Qué tipo de gráfica elaboraron** • 61,5% realiza una gráfica continua • 29,5% realiza una gráfica de puntos • 4,5% realizara un histograma • 4,5% no realizan la gráfica **10. Es una pregunta para realizar en el GeoGebra** **11. Usando el software GeoGebra elabora la gráfica de tu experimento** • Los estudiantes hacen uso del procediendo explicado en la fase II **12. La expresión algebraica que obtuviste** **13. Evaluar la función**
	3. Resolución de preguntas	**14. Los estudiantes participan activamente en la socialización** **15. ¿Cuáles son las variables que interviene en el proceso?** • 74,8% tiempo y volumen • 2,3% días y agua • 4,6% responde otra cosa • 2,3% incluyen factores como la temperatura, el líquido analizado, material del recipiente, etc. • 6,8% las magnitudes horas y cm cúbicos • 9,2% no contesta. **16. Relación entre las variables** • 40,9% Existe una relación lineal • 34,1% a medida que transcurre el tiempo disminuye el volumen • 2,3% no existe ninguna relación por que no hubo cambio • 9,1% existe una relación de proporcionalidad inversa **17. Cuáles son las variables dependiente e independiente** • Contestas acertadamente todos los estudiantes **18. Dominio** • Todos los estudiantes hacen uso de intervalos para dar explicación **19. rango** • Todos los estudiantes hacen uso de intervalos para dar explicación **20. Cuantos registros de volumen por cada instante** • El 100% responde que uno solo **21. Como no es la función** • Dan nombres de funciones como la sinusoidales o grafican relaciones que no son funciones **22. Que tan importante son las representaciones de la funciones** • Permiten encontrar los resultados.
Parte III	4. Socialización	Una gran parte de los estudiantes quería exponer su trabajo
	5. Institucionalización	En este proceso los estudiantes están receptivos frente a la presentación del docente

Anexo 10. Hoja de trabajo No. 2 "El Parqueadero"

PARTE 1:

DIAGNOSTICO

1. ¿Cómo considera la relación entre las variables costo de parqueo de un vehículo y el tiempo de duración de ese parqueo?

2. Has un bosquejo de cómo sería la gráfica de la relación entre el costo de parquear un vehículo y el tiempo en que este estuvo parqueado

3. ¿A una única duración de tiempo le correspondería un único costo a pagar? Explica

4. ¿Es la relación entre el costo de parqueo y el tiempo de duración una función? Explica

PARTE 2:

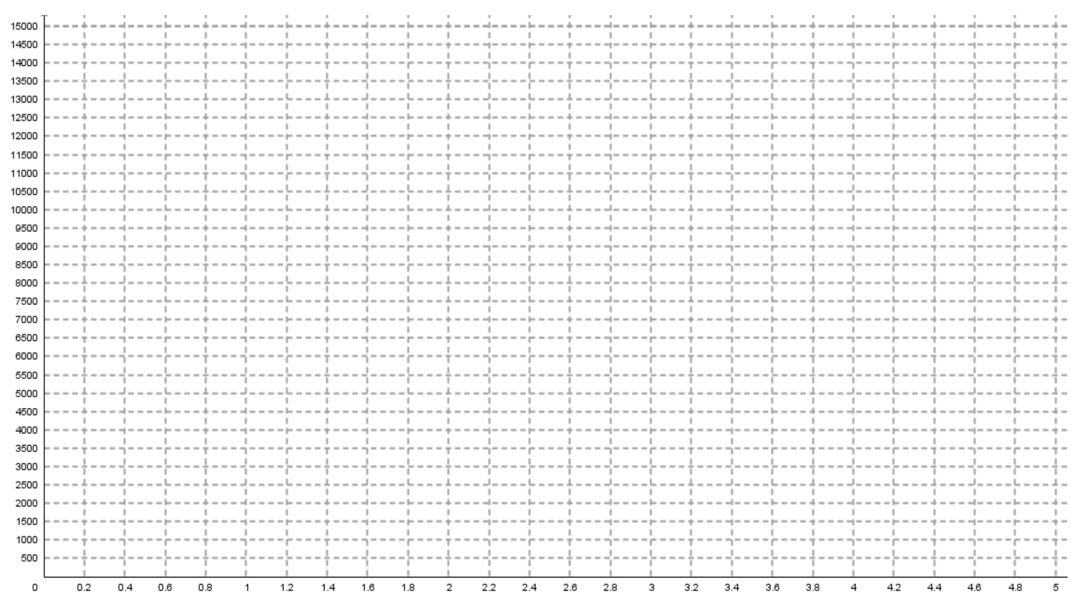
EL EXPERIMENTO: CONTEXTO

En un parqueadero de la ciudad de Cali cobran $2500 por cada hora o fracción de hora el estacionamiento de un vehículo. Con esta información realiza las siguientes actividades:

5. Completa la siguiente tabla:

Tiempo, t (Horas)	**Costo de parqueo, C (Pesos)**
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1	
1.2	
1.4	
1.6	
1.8	
2	
2.2	
2.4	
2.6	
2.8	
3	
3.2	
3.4	
3.6	
3.8	
4	

6. Usa GeoGebra para realizar una gráfica del Costo, C, en el eje vertical contra el tiempo, t, en el eje horizontal. En el siguiente plano cartesiano replica la gráfica.



7. Compara tu gráfica del punto 2 con la gráfica del punto 6. ¿Hay diferencias? Explícalas

8. De acuerdo al contexto propuesto, contesta las siguientes preguntas:

    a. Una persona estacionó su carro en este parqueadero durante 7.5 horas ¿Cuánto debe pagar por concepto de estacionamiento? Has las operaciones

    b. Una persona pagó $15.000 por concepto de parqueo ¿cuánto tiempo estuvo parqueado su carro aproximadamente? Has las operaciones y explica

9. Suponga que una persona parqueó su vehículo durante tres días en intervalos de tiempos diferentes. Estos fueron: Primer día 0,99 horas; segundo día 1 hora y tercer día 1,01 horas. ¿Cuánto debió pagar por concepto de parqueo cada día?

Día 1	Día 2	Día 3

10. En el siguiente espacio en blanco redacta una ley para calcular el costo por concepto del parqueo (puede usar palabras o expresiones algebraicas).

11. Explora la función $ceil(x)$ del GeoGebra. Ingresa en la línea de entrada la expresión $f(x) = ceil(x)$ y presiona la tecla Enter. Describe lo que se obtiene en la ventana gráfica.

12. ¿Qué transformación le harías a esta función $f(x) = ceil(x)$ para que se ajuste al del problema del parqueadero?

PARTE 3:

SOCIALIZACIÓN

13. De manera voluntaria tres estudiantes explicaran su experimento incluyendo la técnica empleada para calcular sus registros.
14. Hagan una valoración de esta actividad

INSTITUCIONALIZACIÓN

15. El docente introduce las ideas matemáticas de esta actividad a sus estudiantes.

Anexo 11. Análisis hoja de trabajo 2

HOJA DE TRABAJO		**OBSERVACION DESCRIPTIVA FRENTE AL INSTRUMENTO**
Parte I	1. Diagnostico	**1. Como es la relación** • 61,4% es una relación creciente, entre más tiempo de parqueo más paga • 38,6% es lineal **2. Gráfica** • 79,6% Lineal creciente • 2,3% Lineal decreciente • 4,5% histogramas • 13,6% gráfica de puntos **3. A un único tiempo hay un único pago** • El 100% manifiesta que sí, pues nunca se paga dos veces **4. Es función** - sí, es lineal - si aumenta el tiempo aumenta el costo - si, el pago varía según el tiempo - si, pues no se paga dos veces por duración de tiempo
Parte II	2. La experimentación	**5. Tabla de valores** - 6,8% estudiantes se equivocan en la elaboración de la tabla - 93,2% estudiantes hacen la tabla bien **6. Gráfica usando GeoGebra** - 15,9% Punteada - 54,5% Gráfica parte entera - 27,2% Escalera continua - 2,4% Lineal **7. Escriba las diferencias respecto a la gráfica anterior** - 2,3% No hay diferencias, pues ambas crecen - 4,6% Si hay diferencias, pues se pagan valores cerrados - 18,2% Si hay diferencias, pues la gráfica es creciente estable; deja de subir y luego sube así sucesivamente; creciente constante - 2,3% Si hay diferencias, pues a un mismo valor de y le corresponden varios x - 38,6% Si hay diferencias, pues la gráfica es "escalerica", "fracmentada", "tiene partiduras", "es por fracciones", "es segmentada", "es discontinua", "es por lapsos") - 34% Si hay diferencias, cambia todo, es lineal y creciente
	3. Resolución de preguntas	**8. Si parqueó 7.5 horas ¿cuánto pago?** - Los estudiantes contestan correctamente realizando procedimientos numéricos **Si pagó $15000 cuanto tiempo estuvo el auto parqueado?** - 18,2% de los estudiantes reconocen que pudo haber estado parqueado entre 5 y 6 horas - 81,8% estudiantes se concentra en el cálculo por ensayo y error y manifiestan que con 6 horas se paga ese valor

<table>
<tr><td></td><td></td><td>9. Vecindad de 1
- Los estudiantes contestan correctamente lo que debe pagar cada uno de los 3 días. Hacen procedimiento numéricos
10. La ley
- 29,5% estudiantes hacen uso de explicaciones numéricas refiriéndose a un caso puntual
- 20,5% estudiantes hacen uso de una explicación textual
- 2,3% estudiante hace uso del concepto de intervalo
- 2,3% estudiante hace uso de una representación conjuntista de la situación
- 6,8% estudiantes no contestan
- 36,4% estudiantes hacen corrección a su respuesta e introducen lo explicado en institucionalización (12) o en la pregunta siguiente (5)
11. La función $ceil(x)$ y su gráfica
- Los estudiantes grafican la función $ceil(x)$ haciendo uso de la línea de entrada del GeoGebra
12. Transformación de la función $ceil(x)$
- Por medio del ensayo y error, los estudiantes ajustan la función $ceil(x)$ a la representación de la situación problema</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parte III</td><td>4. Socialización</td><td>13. Socialización
- Tres estudiantes participan
14. Valoración de la actividad
- Muy buena
- Interesante trabajar solo y después socializar
- Me gusto la función parte entera nunca la había visto
- Me gusta la gráficas diferente
- Ayuda a entender la realidad</td></tr>
<tr><td>5. Institucionalización</td><td>Se introducen las ideas matemáticas</td></tr>
</table>

Anexo 12. Hoja de trabajo No. 3 “Temperatura del agua”

TEMPERATURA DEL AGUA

PARTE I

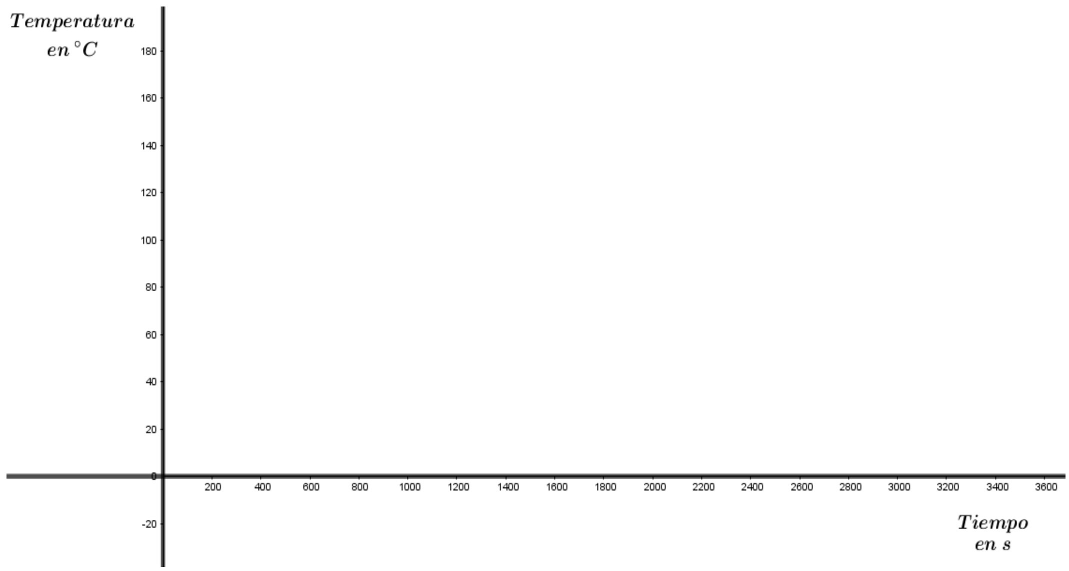
DIAGNOSTICO

Imagínate la siguiente situación. Sobre una resistencia de una estufa eléctrica que emite una potencia constante de calor, se coloca un recipiente con un litro de agua a temperatura ambiente y se empieza a registrar la temperatura que va alcanzando el agua, en °C, cada 30 segundos. Contesta:

1. ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente de la anterior situación?

2. ¿Cómo considera la relación entre dicha variables? ¿Cómo se comporta una respecto a la otra?

3. Usando el siguiente plano cartesiano, has una representación gráfica de la relación que crees que existe entre la temperatura del agua y al tiempo.



4. ¿Cuál crees que es la máxima temperatura que podría alcanzar el agua? Explica.

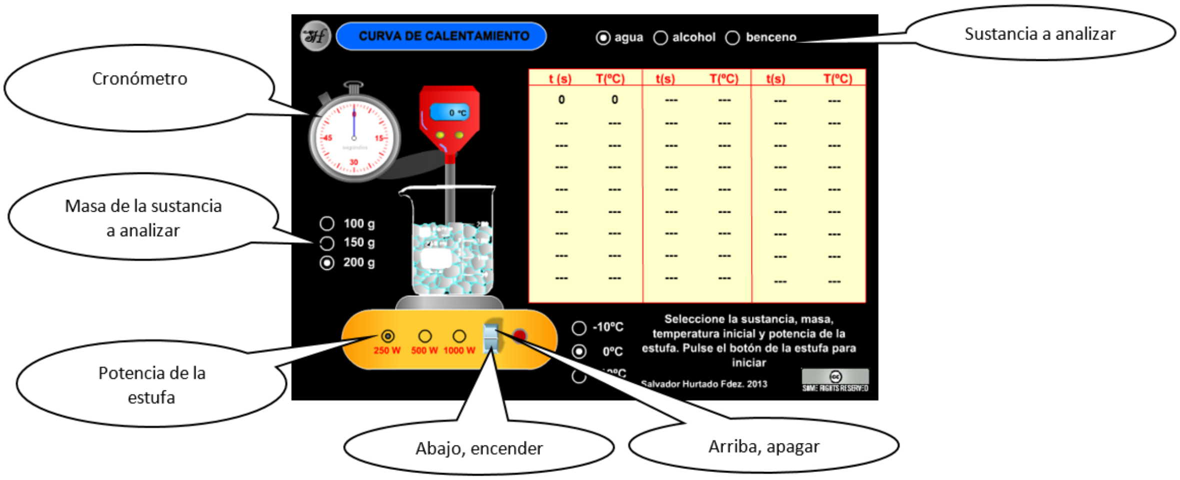
5. ¿Es posible que en distintos instantes de tiempo el agua tenga la misma temperatura?

6. ¿Entre qué valores cambia la temperatura y el tiempo? Es decir ¿Cuál es el dominio y el rango para dicha relación?

PARTE II

TOMA DE DATOS

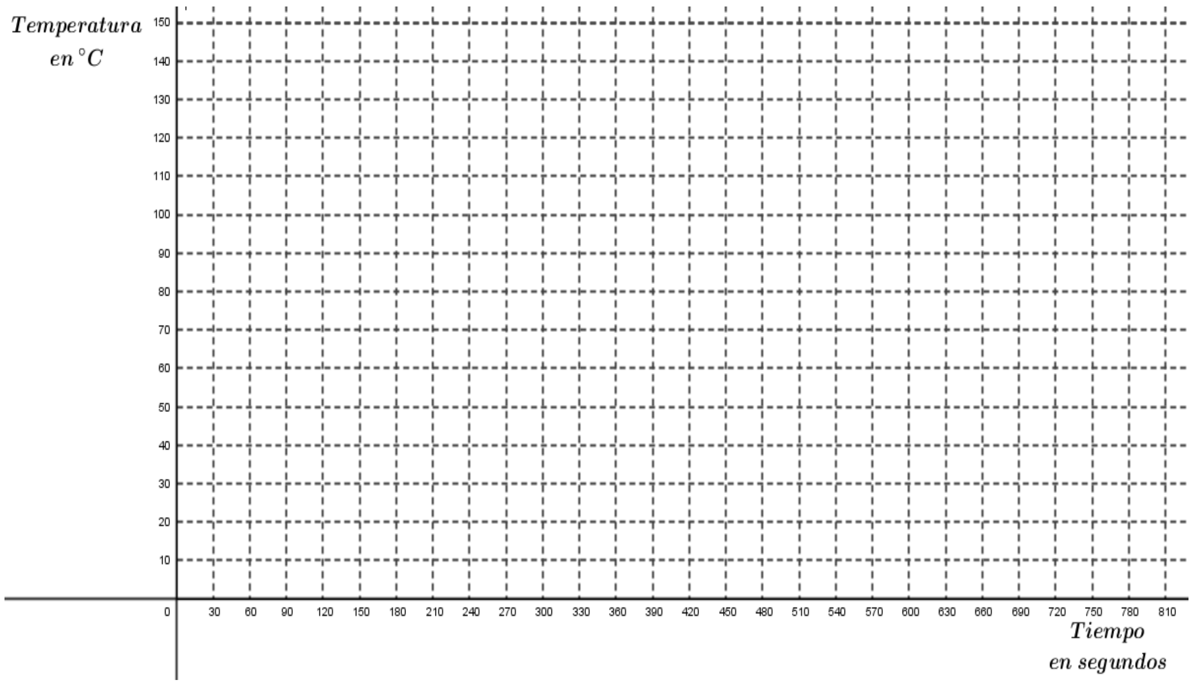
Ingresa a la página http://labovirtual.blogspot.com.co/search/label/Curva%20de%20calentamiento. En esta aparece un laboratorio virtual en la que se emula las temperaturas de calentamiento que alcanzan distintas sustancias cuando se le aplica diferentes temperaturas. Tenga en cuenta:



7. Selecciona 200 g de agua, a una temperatura inicial de 0°, a 250 w de potencia de la resistencia eléctrica y captura los datos cada 30 s. completa la siguiente tabla.

$t(s)$	$T(°C)$	$t(s)$	$T(°C)$	$t(s)$	$T(°C)$

8. Crea una lista de puntos en el software GeoGebra haciendo uso de la hoja de cálculo. Une los puntos consecutivos haciendo uso de la herramienta segmento. Replica la gráfica obtenida en el siguiente plano.



9. ¿Qué diferencias encuentra entre la gráfica del punto 2 que tú realizaste y la gráfica anterior?

10. Al observar la gráfica ¿Cuál sería el dominio y cuál sería el rango? explica

11. De la hoja de cálculo del GeoGebra, selecciona los puntos cuyas imágenes son equivalentes a cero. Utiliza la herramienta análisis de regresión para dos variables y escribe el modelo matemáticos que encontraste. Contesta: ¿Para qué intervalo de tiempo es válida la ley encontrada?

12. Repite el procedimiento del punto anterior pero tomando solo los puntos donde verifique un crecimiento Utiliza la herramienta análisis de regresión para dos variables y escribe el modelo matemáticos que encontraste. Contesta: ¿Para qué intervalo de tiempo es válida la ley encontrada?

13. Finalmente, repite el procedimiento para los puntos cuyas imágenes equivalen a 100 y has un análisis de regresión. Escribe el modelo matemático que encontraste. Contesta: ¿Para qué intervalo de tiempo es válida la ley encontrada?

14. En el siguiente espacio en blanco redacta una ley teniendo en cuenta las tres expresiones algebraicas obtenidas anteriormente que permita determinar la temperatura del agua en función del tiempo.

PARTE 3:

SOCIALIZACIÓN

15. De manera voluntaria tres estudiantes explicaran sus apreciaciones sobre la actividad realizada.

16. Hagan una valoración de esta actividad respecto:
    a. Al uso de la tecnología
    b. A la situación hipotética planteada
    c. Al aprendizaje matemático

INSTITUCIONALIZACIÓN

17. El docente introduce las ideas matemáticas de esta actividad a sus estudiantes.

Anexo 13. Análisis hoja de trabajo No. 3

<table>
<tr><th colspan="2">HOJA DE TRABAJO</th><th>OBSERVACION DESCRIPTIVA FRENTE AL INSTRUMENTO</th></tr>
<tr><td>Parte I</td><td>1. Diagnostico</td><td>1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación?
• El 100% de los estudiantes manifiesta que el tiempo que es la variable independiente y temperatura que es la variable dependiente
2. ¿Cómo es la relación entre dichas variables?
• 65,9% al transcurrir el tiempo aumenta la temperatura del agua
• 11,4% al pasar el tiempo más evaporación
• 6,8% es una relación lineal
• 6,8% es una relación constante porque ambas variables crecen de igual forma
• 2,3% entre más temperatura menos agua
• 6,8% La temperatura puede subir o bajar dependiendo del tiempo
3. ¿Cómo es la gráfica?
• 54,6% es una gráfica Lineal con crecimiento hasta el infinito
• 31,8% Lineal continuo con crecimiento hasta t=100°
• 6,8% La gráfica es lineal y luego constante
• 6,8% lineal por puntos definidos hasta t=100°
4. Máxima temperatura
• 74,9% la temperatura máxima es 100°
• 20,5% la temperatura máxima es mayor a 100 porque ahí ya se empieza a evaporar el liquido
• 2,3% la temperatura máxima alcanzada es menor de 99,9 °C porque al llegar al 100 se evapora el agua
• 2,3% la temperatura máxima depende de la cantidad de agua
5. ¿Es posible que en diferentes instantes de tiempo halla una misma temperatura?
• 70,5% No es posible
• 29,5% Si es posible
6. Cuál es el dominio y rango del problema
• 50% usa intervalos teniendo en cuenta que el rango es hasta 100
• 25% usan intervalos pero no consideran el rango hasta 100
• 25% indican el rango y el dominio en términos de las variables.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parte II</td><td>2. La experimentación</td><td>7. Toma de datos
• El 100% elabora la tabla en su totalidad
8. Elaboración de la Gráfica
• 25% gráfica continua
• 75% gráfica por puntos</td></tr>
<tr><td>3. Resolución de preguntas</td><td>9. Diferencias entre gráficas
• 65,9% Descripción centrada en la forma de la gráfica (Constante-creciente-constante; diferentes niveles, es un escalas)
• 34,1% descripción centrada en las magnitudes y en lo numérico.
10. Dominio y rango
• 52,3% Hacen referencia a intervalos
• 47,7% Hacen referencia a las variables
Pregunta 11, 12 y 13
• Los estudiantes propones las leyes en términos algebraicos y asignando las condiciones.
14. Ley general
• Los estudiantes unifican las tres leyes en una sola y construyen la función por partes que se ajusta a la gráfica</td></tr>
</table>

Parte III	4. Socialización	**15. Valoración** • Los estudiantes hacen una valoración de la actividad en cuanto: - Uso de tecnología - La situación planteada - El aprendizaje matemático
	5. Institucionalización	Función por partes

Anexo 14. Tabla de frecuencia por preguntas de la prueba final

Pregunta	No. de respuestas correctas	f%
1	19	43,2%
2A	37	84,1%
2B	42	95,5%
2C	29	65,9%
2D	30	68,2%
2E	17	38,6%
2F	25	56,8%
2G	30	68,2%
2H	31	70,5%
3A	33	75,0%
3B	43	97,7%
3C	31	70,5%
3D	38	86,4%
3E	39	88,6%
3F	41	93,2%
4A	11	25,0%
4B	20	45,5%
4C	43	97,7%
4D	30	68,2%
4E	19	43,2%
4F	35	79,5%
5A	20	45,5%
5B	23	52,3%
5C	19	43,2%
5D	33	75,0%
5E	38	86,4%
5F	27	61,4%
6	23	52,3%
7A	38	86,4%
7B	38	86,4%
7C	29	65,9%
7D	29	65,9%
7E	40	90,9%
7F	41	93,2%

Anexo 15. Tabla de calificaciones por estudiante y estadígrafos de la prueba final

NOMBRE	No. RESPUESTAS CORRECTAS	PRUEBA FINAL
Est. 1	26	76,5
Est. 2	18	52,9
Est. 3	25	73,5
Est. 4	18	52,9
Est. 5	27	79,4
Est. 6	14	41,2
Est. 7	29	85,3
Est. 8	21	61,8
Est. 9	27	79,4
Est. 10	23	67,6
Est. 11	28	82,4
Est. 12	27	79,4
Est. 13	20	58,8
Est. 14	15	44,1
Est. 15	23	67,6
Est. 16	27	79,4
Est. 17	29	85,3
Est. 18	22	64,7
Est. 19	21	61,8
Est. 20	27	79,4
Est. 21	20	58,8
Est. 22	26	76,5
Est. 23	24	70,6
Est. 24	23	67,6
Est. 25	28	82,4
Est. 26	28	82,4
Est. 27	20	58,8
Est. 28	31	91,2
Est. 29	23	67,6
Est. 30	26	76,5
Est. 31	18	52,9
Est. 32	23	67,6
Est. 33	25	73,5
Est. 34	21	61,8
Est. 35	12	35,3
Est. 36	25	73,5
Est. 37	17	50,0
Est. 38	24	70,6
Est. 39	15	44,1
Est. 40	24	70,6
Est. 41	26	76,5
Est. 42	25	73,5
Est. 43	26	76,5
Est. 44	23	67,6

Media	23,2	68,2%
Mediana	24	70,6%
Moda	23	67,6%
Desv. Estand.	4,4	13,0%
Rango	19	19,0%

Anexo 16. Datos emparejados

NOMBRE	PRUEBA INICIAL	PRUEBA FINAL
Est. 1	52,9	76,5
Est. 2	29,4	52,9
Est. 3	47,1	73,5
Est. 4	44,1	52,9
Est. 5	44,1	79,4
Est. 6	44,1	41,2
Est. 7	47,1	85,3
Est. 8	47,1	61,8
Est. 9	58,8	79,4
Est. 10	55,9	67,6
Est. 11	41,2	82,4
Est. 12	50,0	79,4
Est. 13	20,6	58,8
Est. 14	14,7	44,1
Est. 15	38,2	67,6
Est. 16	41,2	79,4
Est. 17	35,3	85,3
Est. 18	47,1	64,7
Est. 19	44,1	61,8
Est. 20	41,2	79,4
Est. 21	38,2	58,8
Est. 22	23,5	76,5
Est. 23	58,8	70,6
Est. 24	20,6	67,6
Est. 25	29,4	82,4
Est. 26	41,2	82,4
Est. 27	35,3	58,8
Est. 28	58,8	91,2
Est. 29	58,8	67,6
Est. 30	47,1	76,5
Est. 31	32,4	52,9
Est. 32	20,6	67,6
Est. 33	41,2	73,5
Est. 34	35,3	61,8
Est. 35	41,2	35,3
Est. 36	41,2	73,5
Est. 37	35,3	50,0
Est. 38	32,4	70,6
Est. 39	17,6	44,1
Est. 40	38,2	70,6
Est. 41	38,2	76,5
Est. 42	26,5	73,5
Est. 43	38,2	76,5
Est. 44	32,4	67,6

Anexo 17. Prueba valorativa

Antonio José Camacho INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA | DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

DOCENTE	VICTOR MANUEL URIBE VILLEGAS			E- MAIL	vuribe@admon.uniajc.edu.co
ASIGNATURA	MATEMÁTICAS I	FECHA	16/03/2018	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN DE LA METODOLOGÍA
ESTUDIANTE				GRUPO	EDAD
COD. EST.				PROG. ACADEM.	
E-MAIL EST.				SEXO	M ◯ F ◯

A continuación se solicita valorar cada una de las actividades desarrolladas en este curso de matemáticas en el que se han resuelto diferentes situaciones problema alrededor del concepto de función. Para esto marca con una X una casilla del 1 al 5 donde 1 significa deficiente y 5 significa excelente.

VALORACIÓN	1	2	3	4	5
METODOLOGÍA DE TRABAJO EN:					
- **En la prueba diagnóstico.** (Recuerda, se realizó una prueba diagnóstica individual sobre el concepto de función, dominio, rango variable dependiente, variables independientes y diferentes representaciones de funciones)					
- **Actividad de capacitación en GeoGebra.** (recuerda, las primeras actividades con el uso del GeoGebra se centraron en tres situaciones: (1) situación en contexto matemático en el que se les dio una listado de puntos; (2) Situación realista en el que se trabajó con la relación entre apretones de manos y número de personas que se saludan y (3) situación hipotética en la que se trabajó con una población de bacterias.					
- **Hoja de trabajo No. 1**: Evaporación de un liquido a temperatura ambiente					
- **Hoja de trabajo No. 2**: Parqueadero. Relación entre el costo del estacionamiento y el tiempo del parqueo.					
- **Hoja de trabajo No. 3**: temperatura del agua cuando está en un recipiente sobre una resistencia eléctrica y el tiempo.					
- **Prueba final**					
USO DE TECNOLOGÍA					
- Implementación de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas					
- Articulación de distintas representaciones (lo numérico, lo gráfico, lo algebraico)					
- Implementación del laboratorio virtual					
ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN					
- El estudio del concepto de función a través de situaciones problema en contexto					
- Tu actitud frente al estudio de las funciones					
- Asígnate una valoración de acuerdo a tu nivel de aprendizaje que crees has alcanzado del concepto de función.					

Si de ti dependiera la metodología de cómo se enseñanza las matemáticas ¿escogerías la enseñanza de las matemáticas basados en problemas en contexto como los que hemos realizado? Explica

Escribe cualquier observación adicional que quieras realizar.

Anexo 18. Resultados prueba valorativa

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

DOCENTE	VICTOR MANUEL URIBE VILLEGAS			E- MAIL	vuribe@admon.uniajc.edu.co
ASIGNATURA	MATEMATICAS I	FECHA	16/03/2018	ACTIVIDAD	EVALUACION DE LA METODOLOGÍA
ESTUDIANTE				GRUPO	EDAD
COD. EST.				PROG. ACADEM.	
E-MAIL EST.				SEXO	M ○ F ○

A continuación se solicita valorar cada una de las actividades desarrolladas en este curso de matemáticas en el que se han resuelto diferentes situaciones problema alrededor del concepto de función. Para esto marca con una X una casilla del 1 al 5 donde 1 significa deficiente y 5 significa excelente.

VALORACIÓN	1	2	3	4	5
METODOLOGÍA DE TRABAJO EN:					
- **En la prueba diagnóstico**. (Recuerda, se realizó una prueba diagnóstica individual sobre el concepto de función, dominio, rango variable dependiente, variables independientes y diferentes representaciones de funciones)	0,0%	0,0%	13,64%	34,09%	52,27%
- **Actividad de capacitación en GeoGebra**. (recuerda, las primeras actividades con el uso del GeoGebra se centraron en tres situaciones: (1) situación en contexto matemático en el que se les dio una listado de puntos; (2) Situación realista en el que se trabajó con la relación entre apretones de manos y número de personas que se saludan y (3) situación hipotética en la que se trabajó con una población de bacterias.	0,0%	0,0%	2,27%	40,91%	56,82%
- **Hoja de trabajo No. 1**: Evaporación de un líquido a temperatura ambiente	0,0%	2,33%	16,28%	32,56%	48,84%
- **Hoja de trabajo No. 2**: Parqueadero. Relación entre el costo del estacionamiento y el tiempo del parqueo.	0,0%	0,0%	6,82%	31,82%	61,36%
- **Hoja de trabajo No. 3**: temperatura del agua cuando está en un recipiente sobre una resistencia eléctrica y el tiempo.	0,0%	0,0%	2,27%	25,00%	72,73%
- **Prueba final**	0,0%	0,0%	2,27%	47,73%	50,00%
USO DE TECNOLOGÍA					
- Implementación de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas	0,0%	0,0%	4,76%	28,57%	66,67%
- Articulación de distintas representaciones (lo numérico, lo gráfico, lo algebraico)	0,0%	0,0%	0,0%	35,00%	65,00%
- Implementación del laboratorio virtual	0,0%	0,0%	5,13%	25,64%	69,23%
ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN					
- El estudio del concepto de función a través de situaciones problema en contexto	0,0%	0,0%	4,65%	48,84%	46,51%
- Tu actitud frente al estudio de las funciones	0,0%	0,0%	6,98%	48,84%	44,19%
- Asígnate una valoración de acuerdo a tu nivel de aprendizaje que crees has alcanzado del concepto de función.	0,0%	0,0%	12,20%	73,17%	14,63%

Si de ti dependiera la metodología de cómo se enseñanza las matemáticas ¿escogerías la enseñanza de las matemáticas basados en problemas en contexto como los que hemos realizado? Explica

Escribe cualquier observación adicional que quieras realizar.